March 5, 2025

OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA PARA LA ECONOMÍA

ECONOMÍA, DERECHO–ECONOMÍA, ESTUDIOS INTERNACIONALES–ECONOMÍA

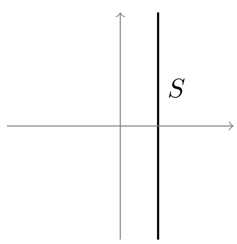
HOJA 1. INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA

(1) *Dibujar los conjuntos factibles para un problema de optimización de dos variables, x_1 y x_2, donde en cada caso, las restricciones son las siguientes.*

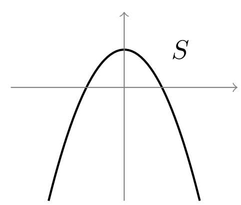
(a) $x_1 = 10$;
(b) $x_1^2 + 3x_2 = 1$;
(c) $\ln(x_1 + x_2) \leq 1$;
(d) $e^{x_2} - x_1 \geq 0$, $x_1 \geq 1$, $x_2 < 0$;
(e) $x_2 \geq 4$, $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 25$.

Solución:

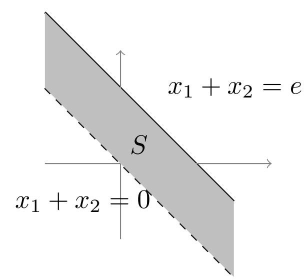
(a)



(b)



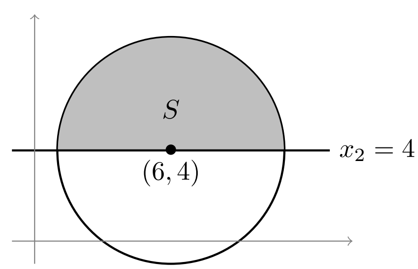
(c)



(d)

$S = \emptyset$

(e)

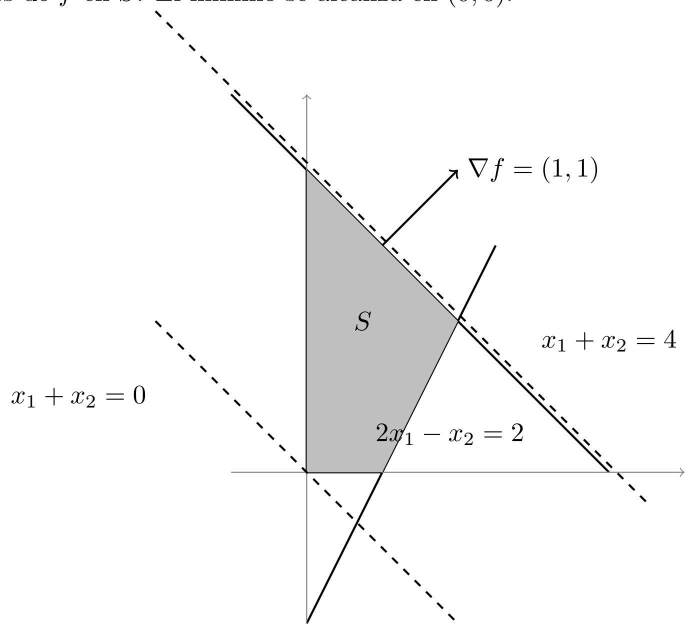


(2) *Resolver gráficamente, utilizando curvas de nivel, direcciones de preferencia, y conjuntos factibles, los siguientes problemas*

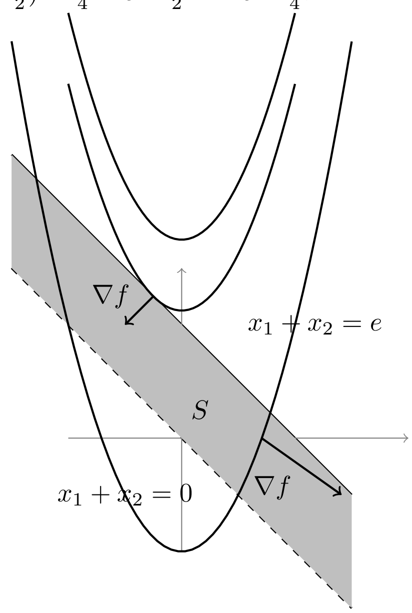
(a) opt $x_1 + x_2$ *sujeto a* $2x_1 - x_2 \leq 2$, $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$;
(b) opt $x_1^2 - x_2$ *sujeto a* $\ln(x_1 + x_2) \leq 1$.

Solución:

(a) Las curvas de nivel son las rectas $x_1 + x_2 = k$, $k \in \mathbb{R}$. La dirección de preferencia es $\nabla f(x_1, x_2) = (1, 1)$,para todo (x_1, x_2), donde $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. La recta de nivel mayor que contiene puntos del conjunto factible es $x_1 + x_2 = 4$, luego el segmento de extremos $(0, 4)$ y $(2, 2)$ es un segmento de máximos globales de f en S. El mínimo se alcanza en $(0, 0)$.



(b) Las curvas de nivel $\{x_1^2 - x_2 = k\}$, $k \in \mathbb{R}$, son parábolas convexas. El gradiente de $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$ es $\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1, -1)$, que es la dirección (dependiente del punto) donde la función crece a mayor ritmo. No existen puntos del conjunto factible por el que pasen curvas de nivel máximo, luego el problema no está acotado superiormente, y no existe máximo global. Sin embargo, hay un punto del conjunto factible que pertenece a una curva de nivel menor de entre todas las que cortan a S: es el punto de tangencia de la curva de nivel k (por determinar) y la recta $x_1 + x_2 = e$. La pendiente de la parábola en el punto (x_1, x_2) es $2x_1$. La pendiente de la recta $x_1 + x_2 = e$ es -1. Luego, el punto de tangencia satisface $2x_1 = -1$, o $x_1 = -\frac{1}{2}$. Al substituir en la recta, encontramos que $x_2 = e + \frac{1}{2}$. Luego, el mínimo global de f en S es el punto $(-\frac{1}{2}, e + \frac{1}{2})$ y el valor mínimo de f en S es $f(-\frac{1}{2}, e + \frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - e - \frac{1}{2} = -e - \frac{1}{4}$.



(3) *Se considera la función $f(x) = 1 - e^{-x^2}$. ¿Tiene esta función un máximo o un mínimo en el punto $x = 0$?*

Solución: Tenemos $-x^2 \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Dado que la función exponencial es creciente, $e^{-x^2} \leq e^0 = 1$, luego $1 - e^{-x^2} = f(x) \geq 1 - 1 = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Por otra parte, $f(x) = 0$ sii $x = 0$, luego 0 es el mínimo global de f y es único.

(4) *Probar que*

(a) *Los dos problemas*

$$\max f(x) \text{ sujeto a} x \in S$$

$$\min -f(x) \text{ sujeto a } x \in S$$

tienen las mismas soluciones

(b) *Los dos problemas*

$$\max f(x) \text{ sujeto a } x \in S$$

$$\max F(f(x)) \text{ sujeto a } x \in S,$$

donde $F : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente, con $f(S) \subseteq D$, tienen las mismas soluciones.

Solución:

(a) Por definición, $x_0 \in S$ es un máximo global de f en S sii $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in S$, sii $-f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in S$, sii $(-f)(x) \geq (-f)(x_0)$ para todo $x \in S$, sii x_0 es un mínimo global de f en S.

(b) (i) Veamos que si $x_0 \in S$ es un máximo global de f en S, entonces x_0 es un máximo global de la composición $F \circ f$ en S.
Por definición de máximo global, $f(x) \leq f(x_0)$ para todo $x \in S$. Dado que F es creciente

$$F(f(x)) \leq F(f(x_0)),$$

es decir, $(F \circ f)(x \leq (F \circ f)(x_0)$, para todo $x \in S$. Por tanto, x_0 es un máximo global de $F \circ f$ en S.
(ii) Veamos que si $x_0 \in S$ es un máximo global de $F \circ f$ en S, entonces x_0 es un máximo global de f en S.
Para probarlo, razonaremos por reducción al absurdo, suponiendo que x_0 es un máximo global de $F \circ f$ en S, pero **no** es máximo global de f en S. Entonces, existe $x \in S$ tal que $f(x_0) < f(x)$. Dado que F es estrictamente creciente

$$(F \circ f)(x_0) = F(f(x_0)) < F(f(x)) = (F \circ f)(x) \leq (F \circ f)(x_0),$$

obteniendo la contradicción $(F \circ f)(x_0) < (F \circ f)(x_0)$.

(5) *Una empresa produce dos bienes, denotados A y B. El coste diario de producir x unidades de A y y unidades de B es*

$$C(x, y) = 0.05x^2 + 0.05y^2 - 0.05xy + 2x + 6y + 100.$$

La empresa vende todo lo que produce al precio de 13 por unidad de A y de 10 por unidad de B. Formular el problema de optimización de la empresa, si ésta desea maximizar beneficios.

Suponga ahora que se requiere que el número de unidades producidas de A sea al menos el doble que las de B. Formular el nuevo problema de optimización de la empresa, si ésta desea maximizar beneficios.

Solución: La función de beneficios es

$$\pi(x, y) = 13x + 10y - (0.05x^2 + 0.05y^2 - 0.05xy + 2x + 6y + 100).$$

El problema de optimización es

$$\max \pi(x, y) \text{ sujeto a: } x \geq 0,\ y \geq 0.$$

Teniendo en cuenta la restricción, el problema es

$$\max \pi(x, y) \text{ sujeto a: } x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \geq 2y.$$

(6) *(junio 2018) Se considera orden de Pareto definido sobre el conjunto A limitado por la gráfica de la función $g(x) = 10 - \dfrac{6}{3-x}$ y el segmento que une los puntos $(4, 16)$ y $(6, 12)$.*

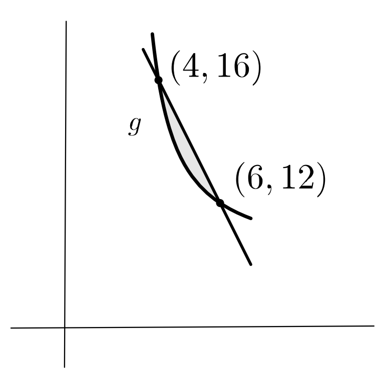
(a) Representar el conjunto A y hallar los maximales y minimales de A.

(b) Sea la función $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = ax + y$, donde $a > 0$. Discutir los puntos donde F alcanza su valor máximo.

Sugerencia: para (a), estudiar la monotonía de la función g, así como su concavidad o convexidad ; para (b), considere separadamente los casos $a > 2$, $a = 2$ y $a < 2$.

Solución:

(a) La función g es decreciente y convexa en el intervalo $[4, 6]$, pues $g'(x) = -6(3-x)^{-2} < 0$, $g''(x) = -12(3-x)^{-3} > 0$ en dicho intervalo. Al ser la función g convexa, el segmento que une los puntos de la gráfica $(4, g(4))$ y $(6, g(6))$ quedará encima de la gráfica de $g(x)$. Por lo tanto, el conjunto A tendrá aproximadamente la forma representada en la figura de más abajo



La ecuación del segmento, teniendo en cuenta que pasa por el punto $(4,16)$ y tiene pendiente -2 será, por tanto, $y = 16-2(x-4)$. Del dibujo se deduce que

$$\text{maximals}(A) = \{(x,y) : 4 \leq x \leq 6, y = 16-2(x-4)\}$$

$$\text{minimals}(A) = \{(x,y) : 4 \leq x \leq 6, y = 10 - \frac{6}{3-x}\}.$$

(b) Al ser F es una función monótona en el orden de Pareto, F alcanzará su máximo en el conjunto de maximales.

Por otro lado, como el conjunto de maximales es un segmento y las curvas de nivel de F son rectas, se puede precisar aún más:

(i) si $a = 2$, todos los maximales de A son maximizadores de F.

(ii) si $a < 2$, el maximizador de F es el punto $(4,16)$.

(iii) si $a > 2$, el maximizador de F es el punto $(6,12)$.

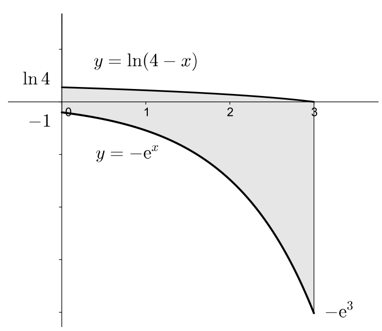
(7) *(enero 2019) Dadas las funciones $f, g : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -e^x$ y $g(x) = \ln(4-x)$, considere el orden de Pareto definido sobre el conjunto $A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 3, f(x) \leq y \leq g(x)\}$.*

(a) Representar aproximadamente el conjunto A y hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

(b) Se considera la función $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = ax + y$, donde $a > 0$. Discutir los puntos donde F alcanza su valor máximo.

Solución:

(a) Tanto f como g son decrecientes en sus dominios, ya que tienen derivadas negativas. Por lo tanto, el dibujo de A será, aproximadamente, como se muestra en la figura a continuación.



Con este gráfico, no hay máximo ni mínimo de A y

$$\text{maximals}(A) = \{(x, g(x)) : 0 \leq x \leq 3\},$$

$$\text{minimals}(A) = \{(x, f(x)) : 0 \leq x \leq 3\}.$$

(b) Caso 1. Supongamos que la línea de nivel de $F(x,y)$ es tangente a $g(x) = \ln(4-x)$ en el punto (x,y). Entonces, las pendientes del gráfico de $y = g(x)$ y la línea de nivel de $F(x,y)$ son iguales, por lo que $g'(x) = -1/(4-x) = -a$. Por lo tanto, cuando $x = 0$, hay tangencia cuando $a = 1/4$. Cuando $x = 3$, hay tangencia cuando $a = 1$. De esto, podemos deducir que cuando $1/4 \leq a \leq 1$, el máximo de $f(x,y)$ se obtiene en $(x = 4-1/a, y = \ln((4-x)) = \ln(1/a) = -\ln a$.

Caso 2.

i) Cuando $0 < a < 1/4$, la línea de nivel de $F(x, y)$ que pasa por el punto $(0, \ln 4)$ es aún más horizontal que cuando $a = 1/4$. Por lo tanto, el máximo de $f(x, y)$ se obtiene en $(x = 0, y = \ln 4)$.
ii) Cuando $1 < a$, la línea de nivel de $F(x, y)$ que pasa por el punto $(3, 0)$ es aún más empinada que cuando $a = 1$. Por lo tanto, el máximo de $f(x, y)$ se obtiene en $(x = 3, y = 0)$.

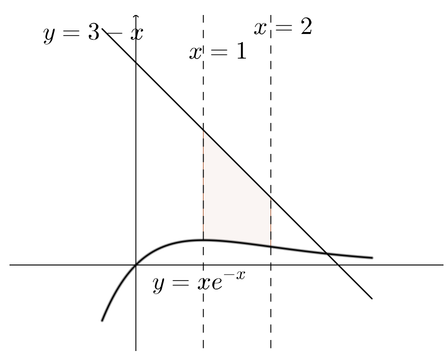
(8) *(junio 19) Dada la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida $h(x) = xe^{-x}$, considere orden de Pareto definido sobre el conjunto $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, h(x) \leq y \leq 3 - x)\}$.*

(a) *Representar aproximadamente el conjunto A y hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.*

(b) *Se considera la función $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = ax + y$, donde $a > 0$. Discutir los puntos donde F alcanza su valor máximo.*

Solución:

(a) Debido a que la función es continua y $h'(x) = e^{-x}(1 - x) < 0$ si $1 < x < 2$, entonces es decreciente en el intervalo cerrado $[1, 2]$. Además, la recta $3 - x$ también es decreciente. Dado que ambas funciones son decrecientes y $\max h(x) = h(1) = \frac{1}{e} < 1 = 3 - 2 = \min(3 - x)$, podemos deducir que $h(x) < 3 - x$, para todo $x \epsilon [1, 2]$. Por lo tanto, el dibujo de A será, aproximadamente, como se muestra en la figura a continuación. Por lo tanto, el orden de Pareto describe el conjunto de la



siguiente manera: no hay máximo ni mínimo y

$$\text{maximals}(A) = \{(x, 3 - x)) : 1 \leq x \leq 2\},$$
$$\text{minimals}(A) = \{(x, xe^{-x}) : 1 \leq x \leq 2\}.$$

(b) Distinguimos los siguientes casos:
Caso 1. Cuando $a = 1$, la pendiente de cualquier línea de nivel de $F(x, y)$ es la misma que la del segmento que une los puntos $(1, 2)$ y $(2, 1)$; es decir: -1. Por lo tanto, en este caso, los maximizadores son todos los puntos del segmento que une los puntos $(1, 2)$ y $(2, 1)$.
Caso 2. Cuando $a < 1$, la pendiente de cualquier línea de nivel de $F(x, y)$ es menor que la del segmento que une los puntos $(1, 2)$ y $(2, 1)$. Por lo tanto, en este caso, el maximizador es el punto $(1, 2)$.
Caso 3. Cuando $1 < a$, la pendiente de cualquier línea de nivel de $F(x, y)$ es mayor que la del segmento que une los puntos $(1, 2)$ y $(2, 1)$. Por lo tanto, en este caso, el maximizador es el punto $(2, 1)$.

(9) *Se considera el orden de Pareto definido sobre los conjuntos listados a continuación.*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$$
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ |x| \leq 1; \ |y| \leq 1\}$$
$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$$
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ x^2 - 9 \leq y \leq 0\}$$
$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 6 - x^2\right\}.$$

Obtener para los conjuntos anteriores, si los hubiera, el máximo y el mínimo, los maximales y los minimales.

Solución:

(a) maximales$(A) = \{(x, y) : x + y = 1\}$.
(b) maximales$(B) = \max B = \{(1, 1)\}$; minimales$(B) = \min B = \{(-1, -1)\}$.
(c) maximales$(C) = \{(x, y) : y = 4 - x^2, 0 \leq x \leq 2\}$; minimales$(C) = \min C = \{(-2, 0)\}$.
(d) maximales$(D) = \max D = \{(3, 0)\}$; minimales$(D) = \{(x, y) : y = x^2 - 9, -3 \leq x \leq 0\}$.
(e) maximales$(E) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 6 - x^2, 0 \leq x \leq 2\right\}$; minimales$(E) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x, -2 \leq x \leq 0\right\}$.