

OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA PARA LA ECONOMÍA
ECONOMÍA, DERECHO-ECONOMÍA, ESTUDIOS INTERNACIONALES-ECONOMÍA
HOJA 1. INTRODUCCIÓN A LA OPTIMIZACIÓN MATEMÁTICA

- (1) Dibujar los conjuntos factibles para un problema de optimización de dos variables, x_1 y x_2 , donde en cada caso, las restricciones son las siguientes.
- (a) $x_1 = 10$;
 - (b) $x_1^2 + 3x_2 = 1$;
 - (c) $\ln(x_1 + x_2) \leq 1$;
 - (d) $e^{x_2} - x_1 \geq 0$, $x_1 \geq 1$, $x_2 < 0$;
 - (e) $x_2 \geq 4$, $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 4)^2 \leq 25$.

- (2) Resolver gráficamente, utilizando curvas de nivel, direcciones de preferencia, y conjuntos factibles, los siguientes problemas
- (a) $\text{opt } x_1 + x_2$ sujeto a $2x_1 - x_2 \leq 2$, $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$;
 - (b) $\text{opt } x_1^2 - x_2$ sujeto a $\ln(x_1 + x_2) \leq 1$.

- (3) Se considera la función $f(x) = 1 - e^{-x^2}$. ¿Tiene esta función un máximo o un mínimo en el punto $x = 0$?

- (4) Probar que
- (a) Los dos problemas

$$\max f(x) \text{ sujeto a } x \in S$$

$$\min -f(x) \text{ sujeto a } x \in S$$

tienen las mismas soluciones

- (b) Los dos problemas

$$\max f(x) \text{ sujeto a } x \in S$$

$$\max F(f(x)) \text{ sujeto a } x \in S,$$

donde $F : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función estrictamente creciente, con $f(S) \subseteq D$, tienen las mismas soluciones.

- (5) Una empresa produce dos bienes, denotados A y B . El coste diario de producir x unidades de A y y unidades de B es

$$C(x, y) = 0.05x^2 + 0.05y^2 - 0.05xy + 2x + 6y + 100.$$

La empresa vende todo lo que produce al precio de 13 por unidad de A y de 10 por unidad de B . Formular el problema de optimización de la empresa, si ésta desea maximizar beneficios.

Suponga ahora que se requiere que el número de unidades producidas de A sea al menos el doble que las de B . Formular el nuevo problema de optimización de la empresa, si ésta desea maximizar beneficios.

- (6) (junio 2018) Se considera orden de Pareto definido sobre el conjunto A limitado por la gráfica de la función $g(x) = 10 - \frac{6}{3-x}$ y el segmento que une los puntos $(4, 16)$ y $(6, 12)$.
- (a) Representar el conjunto A y hallar los maximales y minimales de A .

(b) Sea la función $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = ax + y$, donde $a > 0$. Discutir los puntos donde f alcanza su valor máximo.

Sugerencia: para (a), estudiar la monotonía de la función g , así como su concavidad o convexidad ; para (b), considere separadamente los casos $a > 2$, $a = 2$ y $a < 2$.

(7) (enero 19) Dadas las funciones $f, g : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -e^x$ y $g(x) = \ln(4 - x)$, considere el orden de Pareto definido sobre el conjunto $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, f(x) \leq y \leq g(x)\}$.

(a) Representar aproximadamente el conjunto A y hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A .

(b) Se considera la función $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = ax + y$, donde $a > 0$. Discutir los puntos donde F alcanza su valor máximo.

(8) (junio 19) Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida $h(x) = xe^{-x}$, considere orden de Pareto definido sobre el conjunto $A = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, h(x) \leq y \leq 3 - x\}$.

(a) Representar aproximadamente el conjunto A y hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A .

(b) Se considera la función $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = ax + y$, donde $a > 0$. Discutir los puntos donde F alcanza su valor máximo.

(9) Se considera el orden de Pareto definido sobre los conjuntos listados a continuación.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1; |y| \leq 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 9 \leq y \leq 0\}$$

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 6 - x^2\}.$$

Obtener para los conjuntos anteriores, si los hubiera, el máximo y el mínimo, los maximales y los minimales.