OPTIMIZACIÓN
Banco de Preguntas 2019-2020 convocatoria ordinaria

1. Bloque I. Introducción

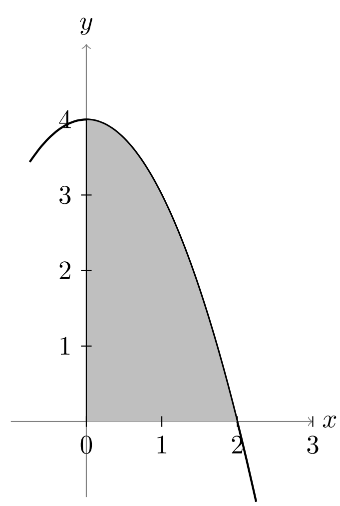
1. Considera el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x \geq 0, y \geq 0, y \leq -x^2 + 4\}$ y la función $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x+y}$.

(a) (4 puntos) Dibuja el conjunto y discute si la función f y el conjunto S satisfacen las hipótesis del Teorema de Weierstrass.

(b) (6 puntos) Dibuja las curvas de nivel de f en el conjunto, siendo una de ellas la que pasa por el punto $(0, 0)$ y calcula el valor de su nivel. Muestra la dirección en la que f crece/decrece y determina (si existen) los extremos globales de f en el conjunto S.

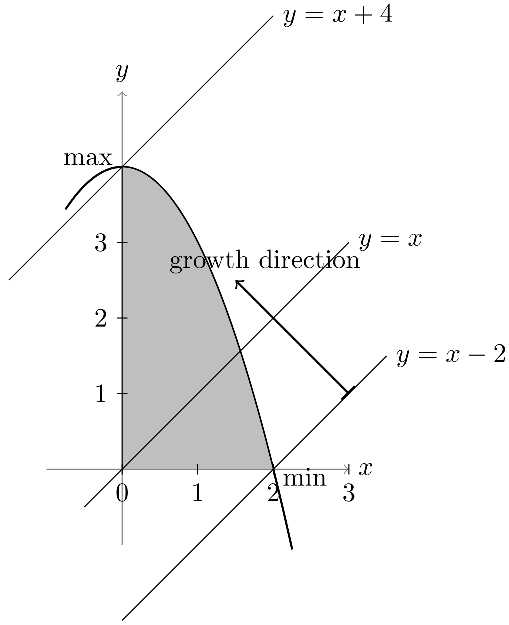
Solución

(a) El conjunto S es la región sombreada dibuja en la figura de más abajo. S es cerrado, ya que contiene a su frontera y obviamente es acotado, luego es compacto. f es continua en $\mathbb{R}^2$ y por tanto también en S. Las condiciones del Teorema de Weierstrass se satisfacen y existen máximo y mínimo global de la función f en el conjunto S.



(b) Las curvas de nivel están dadas por la familia de curvas $e^{-x+y} = c$, donde $c \in \mathbb{R}$ o, equivalentemente, $-x + y = \ln c$, $c > 0$, por tanto son rectas de pendiente 1 y cuya ordenada en el origen c aumenta en la dirección $(-1, 1)$ (se muestra en la figura de más abajo). La ordenada mayor se alcanza en el conjunto S en la intersección de $x = 0$ y $y = -x^2 + 4$, que es el punto $(0, 4)$ y corresponde a $c = e^4$. El mínimo se alcanza en $(2, 0)$, con nivel $c = e^{-2}$. Luego el máximo global es $(0, 4)$, con valor máximo e^4 y el mínimo global es $(2, 0)$, con valor mínimo e^{-2}.

La curva de nivel que pasa por $(0, 0)$ tiene nivel $c = e^0 = 1$, luego es la recta $-x + y = \ln 1 = 0$.



---

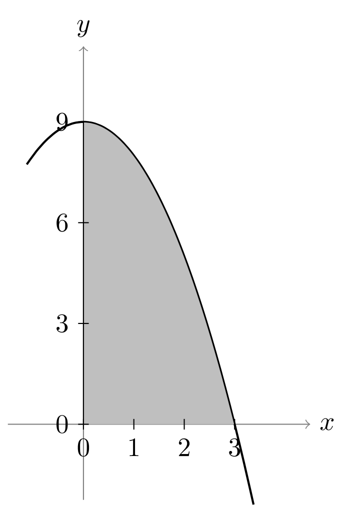
2. Considera el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq -x^2 + 9\}$ y la función $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x+y}$.

(a) (4 puntos) Dibuja el conjunto y discute si la función f y el conjunto S satisfacen las hipótesis del teorema de Weierstrass.

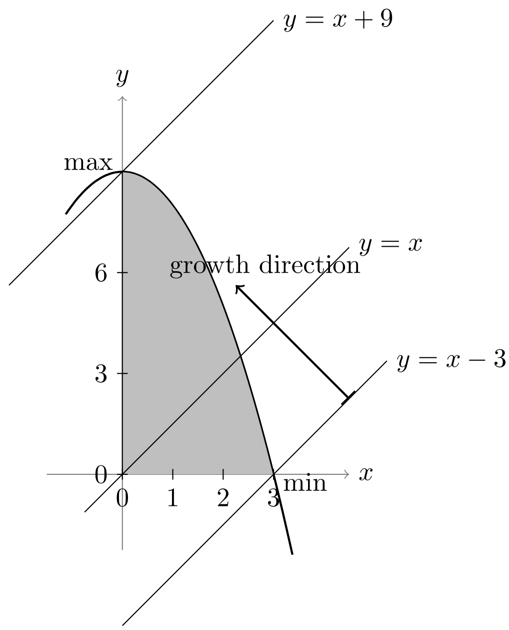
(b) (6 puntos) Dibuja las curvas de nivel de f en el conjunto, siendo una de ellas la que pasa por el punto $(0, 0)$ y calcula el valor de su nivel. Muestra la dirección en la que f crece/decrece y determina (si existen) los extremos globales de f en el conjunto S.

Solución

(a) Ver la resolución del Problema 1(a) anterior y la siguiente figura.



(b) Ver la solución del Problema 1(b) anterior, con las siguientes modificaciones: el máximo global es (0,9), el valor máximo es e^9; el mínimo global es (3,0), el valor mínimo es e^{-3}. Ver la figura.



---

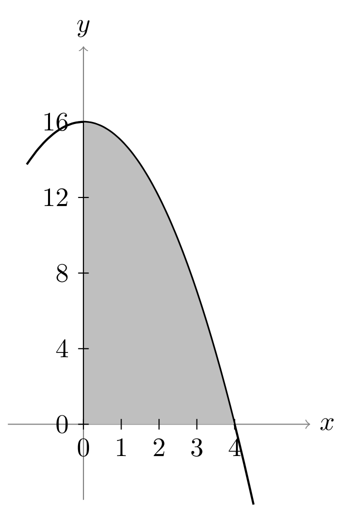
3. Considera el conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ : x \geq 0, y \geq 0, y \leq -x^2 + 16\}$ y la función $f(x, y) = \mathrm{e}^{-x+y}$.

(a) (4 puntos) Dibuja el conjunto y discute si la función f y el conjunto S satisfacen las hipótesis del teorema de Weierstrass.

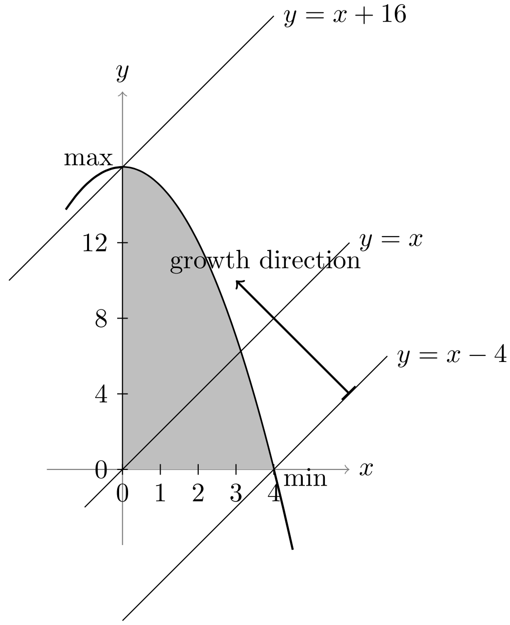
(b) (6 puntos) Dibuja las curvas de nivel de f en el conjunto, siendo una de ellas la que pasa por el punto $(0, 0)$, y calcula el valor de su nivel. Muestra la dirección en la que f crece/decrece y determina (si existen) los extremos globales de f en el conjunto S.

Solución

(a) Ver la resolución del Problema 1(a) anterior y la siguiente figura.



(b) Ver la solución del Problema 1(b) anterior, con las siguientes modificaciones: el máximo global es (0,16), el valor máximo es e^{16}; el mínimo global es (4,0), el valor mínimo es e^{-4}. Ver la figura.



$y = x + 16$
y
max
12
$y = x$
growth direction
8
$y = x - 4$
4
0
x
min
0 1 2 3 4

1. Una empresa que fabrica ordenadores vende tres tipos de ordenadores portátiles (A, B, C) en cantidades x, y y z, respectivamente. El coste de producir un portátil A es 1, el coste de producir un portátil B es 2 y el coste de producir un portátil C es 1. Los costes fijos de producción son de 10 pero solo cuando se produce una cantidad positiva de alguno de los tres modelos de portátiles. En caso de no producir nada los costes fijos son 0. El precio de venta de cada producto viene dado por las siguientes funciones:

para el portátil A es $p(x) = 3 - x$,

para el portátil B es $q(y) = 12 - y$,

para el portátil C es $r(z) = 1 - z$.

(a) (3 puntos) Encuentra la función de costes, la de ingresos y la de beneficios para la empresa cuando la empresa produce una cantidad positiva de alguno de los tres modelos de portátiles.

(b) (3 puntos) Encuentra y clasifica los puntos críticos de la función de beneficios.

(c) (4 puntos) Supongamos que los costes fijos de la empresa fueran menores. ¿Cómo afectaría a la empresa en cuanto a su decisión de producir? ¿Y si fueran mayores?

Solución

(a) La función de costes cuando la empresa produce alguno de los modelos es $C(x, y, z) = x + 2y + z + 10$ y la función de ingresos es $R(x, y, z) = x(3 - x) + y(12 - y) + z(1 - z)$. Luego, la función de beneficios es

$$B(x, y, z) = R(x, y, z) - C(x, y, z) = x(3-x) + y(12-y) + z(1-z) - (x+2y+z+10) = 2x - x^2 + 10y - y^2 - z^2 - 10.$$

(b) El gradiente de la función de beneficios es $\nabla B(x, y, z) = (2 - 2x, 10 - 2y, -2z)$. Haciendo $\nabla B(x, y, z) = 0$:

$$\begin{aligned} 2 - 2x &= 0 \\ 10 - 2y &= 0 \\ -2z &= 0. \end{aligned}$$

La solución de este sistema da un único punto crítico: $x = 1, y = 5, z = 0$. La matriz Hessiana de f

$$Hf = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

es definida negativa. Luego B es estrictamente cóncava y por tanto tiene un único máximo global en el punto $(1, 5, 0)$.

(c) La decisión de la empresa de producir $x = 1$, $y = 5$ and $z = 0$ no cambia si los beneficios se mantienen positivos. Por supuesto, los beneficios crecen si los costes fijos disminuyen. Si los costes fijos aumentan, pero este aum eto es menor que 16, que son los beneficios de la empresa, entonces la decisión de producir $(1, 5, 0)$ sigue siendo óptima. Por el contrario, si el aumento de los costes fijos es superior a 16, los beneficios serían negativos y en este caso, sería mejor no producir. Si el incremento es exactamente de 16, entonces la empresa es indiferente entre producir o no.

---

2. Una empresa que fabrica ordenadores vende tres tipos de ordenadores portátiles (A, B, C) en cantidades x, y y z, respectivamente. El coste de producir un portátil A es 1, el coste de producir un portátil B es 2 y el coste de producir un portátil C is 1. Los costes fijos de producción son de 10 pero solo cuando se produce una cantidad positiva de alguno de los tres modelos de portátiles. En caso de no producir nada los costes fijos son 0. El precio de venta de cada producto viene dado por las siguientes funciones:

para el portátil A es $p(x) = 5 - x$,

para el portátil B es $q(y) = 22 - y$.

para el portátil C es $r(z) = 1 - z$.

(a) (3 puntos) Encuentra la función de costes, la de ingresos y la de beneficios para la empresa cuando la empresa produce una cantidad positiva de alguno de los tres modelos de portátiles.

(b) (3 puntos) Encuentra y clasifica los puntos críticos de la función de beneficios.

(c) (4 puntos) Supongamos que los costes fijos de la empresa fueran menores. ¿Cómo afectaría a la empresa en cuanto a su decisión de producir? ¿Y si fueran mayores?

Solución

Ver la solución del Problema 1 anterior, pero teniendo en cuenta que la función de beneficios es ahora

$$B(x, y, z) = x(5 - x) + y(22 - y) + z(1 - z) - C(x, y, z).$$

La solución es $(x^*, y^* z^*) = (2, 10, 0)$, que da lugar a unos beneficios máximos de $B^* = 94$. Aumentos de los costes fijos por encima de esta cantidad llevarían a la empresa a no producir, por debajo seguiría produciendo las mismas cantidades de producto y si el aumento fuera exactamente de 96, sería indiferente.

---

3. Una empresa que fabrica ordenadores vende tres tipos de ordenadores portátiles (A, B, C) en cantidades x, y y z, respectivamente. El coste de producir un portátil A es 1, el coste de producir un portátil B es 2 y el coste de producir un portátil C is 1. Los costes fijos de producción son de 10 pero solo cuando se produce una cantidad positiva de alguno de los tres modelos de portátiles. En caso de no producir nada los costes fijos son 0. El precio de venta de cada producto viene dado por las siguientes funciones:

para el portátil A es $p(x) = 7 - x$,

para el portátil B es $q(y) = 12 - y$,

para el portátil C es $r(z) = 3 - z$.

(a) (3 puntos) Encuentra la función de costes, la de ingresos y la de beneficios para la empresa cuando la empresa produce una cantidad positiva de alguno de los tres modelos de portátiles.

(b) (3 puntos) Encuentra y clasifica los puntos críticos de la función de beneficios.

(c) (4 puntos) Supongamos que los costes fijos de la empresa fueran menores. ¿Cómo afectaría a la empresa en cuanto a su decisión de producir? ¿Y si fueran mayores?

Solución

Ver la solución del Problema 1 anterior, pero teniendo en cuenta que la función de beneficios es ahora

$$B(x, y, z) = x(7 - x) + y(12 - y) + z(1 - z) - C(x, y, z).$$

La solución es $(x^*, y^* z^*) = (3, 5, 1)$, que da lugar a unos beneficios máximos de $B^* = 50$. Aumentos de los costes fijos por encima de esta cantidad llevarían a la empresa a no producir, por debajo seguiría produciendo las mismas cantidades de producto y si el aumento fuera exactamente de 50, sería indiferente.

---

3. Bloque III. Lagrange

1. Maximizar y minimizar (si es posible) la función $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$ cuando $(x,y,z) \in A$ donde $A = \{(x,y,z) : x+y+z = 1\}$. Para ello se pide:

(a) (3 puntos) Obtén la función de Lagrange y, a continuación, las ecuaciones de sus puntos críticos.

(b) (4 puntos) Calcula los puntos críticos de la función de Lagrange.

(c) (3 puntos) Justifica si dichos puntos son maximizadores o minimizadores de la función. En caso de no existir máximo o mínimo, justifica el por qué.

Solución

(a) La función de Lagrange es

$$L(x,y,z,\lambda) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 + \lambda(1-x-y-z).$$

Los puntos críticos de la Lagrangiana satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1) - \lambda = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-2) - \lambda = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2(z-3) - \lambda = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - x - y - z = 0. \tag{4}$$

(b) A partir de las ecuaciones (1), (2) y (3), se cumple $\lambda = 2(x-1) = 2(y-2) = 2(z-3)$, y por tanto $y = x+1$, $z = x+2$. Sustituyendo estas expresiones en (4) obtenemos $x = -2/3$. Luego el punto crítico es $(-2/3, 1/3, 4/3)$.

(c) El punto crítico obtenido en (b) es el único mínimo global de f sujeto a la restricción, ya que f es estrictamente convexa y el conjunto factible es convexo.

No existe máximo global, ya que la función toma valores arbitrariamente grandes en el conjunto factible. Por ejemplo, $(1,n,-n)$ satisface la restricción para todo entero n y $f(1,n,-n) = (n-2)^2 + (n+3)^2$ tiende a ∞ cuando $n \to \infty$.

---

2. Maximizar y minimizar (si es posible) la función $f(x,y,z) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2$ cuando $(x,y,z) \in A$ donde $A = \{(x,y,z) : x+y+z = 1\}$. Para ello se pide:

(a) (3 puntos) Obtén la función de Lagrange y, a continuación, las ecuaciones de sus puntos críticos.

(b) (4 puntos) Calcula los puntos críticos de la función de Lagrange.

(c) (3 puntos) Justifica si dichos puntos son maximizadores o minimizadores de la función. En caso de no existir máximo o mínimo, justifica el por qué.

Solución

Ver la solución del Problema 1 anterior con la función Lagrangiana

$$L(x,y,z,\lambda) = (x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 + \lambda(1-x-y-z).$$

$(1/3, 4/3, -2/3)$ es el único mínimo global y no hay máximo.

3. Maximizar y minimizar (si es posible) la función $f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2$ cuando $(x, y, z) \in A$ donde $A = \{(x, y, z) : x + y + z = 1\}$. Para ello se pide:

(a) (3 puntos) Obtén la función de Lagrange y, a continuación, las ecuaciones de sus puntos críticos.

(b) (4 puntos) Calcula los puntos críticos de la función de Lagrange. (4 puntos)

(c) (3 puntos) Justifica si dichos puntos son maximizadores o minimizadores de la función. En caso de no existir máximo o mínimo, justifica el por qué.

Solución

Ver la solución del Problema 1 anterior con la función Lagrangiana

$$L(x, y, z, \lambda) = (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 + \lambda(1 - x - y - z).$$

$(4/3, 1/3, -2/3)$ es el único mínimo global y no hay máximo.

4. Bloque IV. Multiplicador

1. Un consumidor puede elegir entre un bien A cuyo precio es 4€ y un bien B cuyo precio es 1€. Tiene un presupuesto mensual de 72 € para gastar enteramente entre ambos bienes. La función de utilidad es $U(x,y) = 8x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, siendo x el número de unidades consumidas del bien A y siendo y el número de unidades consumidas bien B. Si no se puede comprar cantidades negativas se pide:

(a) (3 puntos) Sabiendo que el consumidor consigue la utilidad máxima cuando compra 9 unidades del bien A y 36 del bien B ¿cuánto vale el multiplicador?

(b) (3 puntos) ¿En cuánto varía, aproximadamente, esa utilidad máxima si el presupuesto disponible para comprar esos dos bienes pasa a ser de 73,50 €? (*Sugerencia:* si no se sabe resolver el apartado (a), considérese que el multiplicador vale 4).

(c) (4 puntos) Supongamos ahora el mismo problema con una función de utilidad $U(x,y) = f(x+y)$, donde f es una función estrictamente cóncava que cumple: $f'(27) = 0$. ¿En qué puntos (x,y) maximiza este consumidor su utilidad?

Solución

(a) El problema de optimización es:

$$\max 8x^{1/2}y^{1/2} \quad \text{subject to: } 4x + y = 72.$$

Su función Lagrangiana es $L(x,y,\lambda) = 8x^{1/2}y^{1/2} + \lambda(72 - 4x - y)$ y sus puntos críticos satisfacen el sistema

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4\frac{y^{1/2}}{x^{1/2}} - 4\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 4\frac{x^{1/2}}{y^{1/2}} - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 72 - 4x - y = 0$$

Dado que $x = 9$, $y = 36$ resuelve el problema del consumidor, sustituimos estos valores en la primera ecuación del sistema y encontramos el valor del multiplicador: $\lambda = \frac{36^{1/2}}{9^{1/2}} = \frac{6}{3} = 2$.

(b) El multiplicador es la variación de la utilidad óptima ante cambios infinitesimales en el presupuesto del consumidor (en términos más precisos: es la derivada de la función valor o utilidad indirecta del consumidor cuando el presupuesto del consumidor es 72 euros). Si el cambio es discreto, el multiplicador es un valor aproximado de dicha variación. En este caso el cambio es un incremento positivo, $\Delta b = 73.50 - 72 = 1.5$ euros. Luego el cambio en la utilidad óptima del consumidor es un incremento de aproximadamente

$$\lambda \times \Delta b = 2 \times 1.5 = 3.$$

(c) La Lagrangiana del nuevo problema es

$$L(x,y,\lambda) = f(x+y) + \lambda(72 - 4x - y)$$

y el sistema de Lagrange que permite hallar los puntos críticos es

$$\frac{\partial L}{\partial x} = f'(x+y) - 4\lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = f'(x+y) - \lambda = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 72 - 4x - y = 0.$$

De la primera y la segunda ecuación obtenemos que cualquier punto crítico (x,y,λ) satisface $f'(x+y) = \lambda = 0$ y $4x + y = 72$. Dado que f es estrictamente cóncava y que $f'(27) = 0$, 27 es el único punto que anula f'. Luego los puntos críticos de la Lagrangiana tienen la forma $(x,y,0)$ con $x + y = 27$ y $4x + y = 72$. La solución de este par de ecuaciones es $x = 15$ y $y = 12$. Dado que el problema es convexo, esta es la solución del nuevo problema del consumidor.

---

2. Un consumidor puede elegir entre un bien A cuyo precio es 1€ y un bien B cuyo precio es 4€. Tiene un presupuesto mensual de 72 € para gastar enteramente entre ambos bienes. La función de utilidad es $U(x,y) = 8x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, siendo x el número de unidades consumidas del bien A y siendo y el número de unidades consumidas bien B. Si no se puede comprar cantidades negativas se pide:

(a) (3 puntos) Sabiendo que el consumidor consigue la utilidad máxima cuando compra 36 unidades del bien A y 9 del bien B ¿cuánto vale el multiplicador?

(b) (3 puntos) ¿En cuánto varía, aproximadamente, esa utilidad máxima si el presupuesto disponible para comprar esos dos bienes pasa a ser de 71,50 €? (*Sugerencia:* si no se sabe resolver el apartado (a), considérese que el multiplicador vale 4).

(c) (4 puntos) Supongamos ahora el mismo problema con una función de utilidad $U(x,y) = f(x+y)$, donde f es una función estrictamente cóncava que cumple: $f'(27) = 0$. ¿En qué puntos (x,y) maximiza este consumidor su utilidad?

Solución

Ver la solución del Problem 1 anterior. El problema es ahora:

$$\max 8x^{1/2}y^{1/2} \quad \text{subject to: } x + 4y = 72.$$

(a) $\lambda = 2$.

(b) El cambio en la utilidad óptima es aproximadamente $\lambda \times (71.50 - 72) = 2 \times (-0.50) = -1$.

(c) Usando las ecuaciones $x + 4y = 72$ y $x + y = 27$, tenemos $x = 12$ and $y = 15$.

---

3. Un consumidor puede elegir entre un bien A cuyo precio es 4€ y un bien B cuyo precio es 1 €. Tiene un presupuesto mensual de 72 € para gastar enteramente entre ambos bienes. La función de utilidad es $U(x,y) = 12x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, siendo x el número de unidades consumidas del bien A y siendo y el número de unidades consumidas bien B. Si no se puede comprar cantidades negativas se pide:

(a) (3 puntos) Sabiendo que el consumidor consigue la utilidad máxima cuando compra 9 unidades del bien A y 36 del bien B ¿cuánto vale el multiplicador?

(b) (3 puntos) ¿En cuánto varía, aproximadamente, esa utilidad máxima si el presupuesto disponible para comprar esos dos bienes pasa a ser de 73 €? (*Sugerencia:* si no se sabe resolver el apartado (a), considérese que el multiplicador vale 4).

(c) (4 puntos) Supongamos ahora el mismo problema con una función de utilidad $U(x,y) = f(x+y)$, donde f es una función estrictamente cóncava que cumple: $f'(24) = 0$. ¿En qué puntos (x,y) maximiza este consumidor su utilidad?

Solución

Ver la solución del Problema 1 anterior. El problema es ahora:

$$\max 12x^{1/2}y^{1/2} \quad \text{subject to: } 4x + y = 72.$$

(a) $\lambda = 3$.

(b) El cambio en la utilidad óptima es aproximadamente $\lambda \times (73 - 72) = 3 \times 1 = 3$.

(c) Usando las ecuaciones $4x + y = 72$ y $x + y = 24$, tenemos $x = 16$ and $y = 8$.