P1	P2	P 3	P4

TEORÍA DE LOS JUEGOS
Examen Julio 2010

INSTRUCCIONES:
Escriba las respuestas en el espacio que hay a continuación de la pregunta. Puede utilizar la parte de detrás de la hoja. La duración del examen es de **2 horas y 15 minutos**.

Nombre:
Grado:
Grupo:

1 (20 puntos)

Un profesor ha decidido reemplazar el examen final de un estudiante por un ensayo escrito. El estudiante puede copiar (C) el ensayo de Internet o ser honesto (H) y escribir el ensayo. El profesor puede monitorizar (M) para determinar si el estudiante ha copiado o puede no monitorizar (N).

El profesor puede ser de dos tipos diferentes: un profesor '*blando*' en cuyo caso la matriz de pagos es la que sigue

Al\Prof	M	N
C	$0,1$	$2,0$
H	$1,2$	$1,3$

o un profesor '*duro*' en cuyo caso la matriz de pagos es la que sigue

Al\Prof	M	N
C	$0,1$	$2,0$
H	$1,4$	$1,3$

El estudiante cree que el profesor es *duro* con probabilidad q.

a). (10 puntos) Suponga que el estudiante cree que $q \geq 1/2$. Encuentre todos los equilibrios Bayesianos de Nash en estrategias puras.

b) (10 puntos) Suponga ahora que $q < 1/2$. Encuentre todos los equilibrios Bayesianos de Nash en estrategias puras.

Solución

(a) Encontremos la mejor respuesta del profesor blando. Si el alumno copia, el profesor monitoriza y si el alumno es honesto no lo hace. Por lo que

$$BR_{\text{blando}} = \begin{cases} M \text{ a } C \\ N \text{ a } H \end{cases}$$

La mejor respuesta del duro M ya que es una estrategia estrictamente dominante. Por lo que

$$BR_{\text{duro}} = \begin{cases} M \text{ a } C \\ M \text{ a } H \end{cases}$$

Entonces la mejor respuesta del profesor es

$$BR_{\text{profesor}} = \begin{cases} MM \text{ a } C \\ NM \text{ a } H \end{cases}$$

Para encontrar los equilibrios Bayesianos de Nash tenemos que los pagos o utilidad del alumno son:

$$\begin{array}{ccc} & MM & NM \\ C & 0 & 2(1-q) \\ H & 1 & 1 \end{array}$$

Ahora vemos que si $q \geq 1/2$, se sigue que

$$\begin{array}{ccc} & MM & NM \\ C & 0 & 2(1-q) \\ H & \underline{1} & \underline{1} \end{array}$$

Por lo que el único equilibrio Bayesiano de Nash cuando $q \geq 1/2$ es $\{H, (NM)\}$.

(b) Cuando $q < 1/2$ el alumno quiere C y la mejor respuesta para C es MM. La mejor respuesta para MM es H y la mejor respuesta para H es NM. Como la mejor respuesta para NM es C, no existe un equilibrio Bayesiano en estrategias puras.

2 (30 PUNTOS)

Dos socios (un hijo y un suegro) han de elegir simultáneamente un nivel de esfuerzo entre 0 y 1 para desarrollar un proyecto conjunto. Sea $e_i \in [0, 1]$, el nivel de esfuerzo del jugador i, $i \in \{H, S\}$. Los pagos de cada jugador son:

$$\begin{aligned} U_S(e_H, e_S) &= 20 \min\{e_H, e_S\} - ce_S \\ U_H(e_H, e_S) &= 20 \min\{e_H, e_S\} - ce_H. \end{aligned}$$

Nótese que la función mínimo NO es diferenciable.

a). (4 puntos) Si $c > 20$, ¿cuál es el equilibrio de Nash de este juego y por qué?

b). (8 puntos) Sea $c = 10$. ¿Cuales son los equilibrios de Nash de este juego y por qué?

c). (15 puntos) El hijo ha decidido romper la sociedad para realizar un proyecto con su padre. En esta nueva sociedad el padre elegirá primero su nivel de esfuerzo ($e_P \in [0, 1]$) siendo éste observable por el hijo. Los pagos de cada jugador son:

$$\begin{aligned} U_p(e_H, e_P) &= 2(e_H + e_P + e_H e_P) - c\frac{e_P^2}{2}, \\ U_H(e_H, e_P) &= 20 \min\{e_H, e_P\} - ce_H \end{aligned}$$

siendo $c = 10$. Calcula el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de este nuevo juego.

d). (3 puntos) ¿Se esfuerza más el hijo que antes? Razone su respuesta.

Solución

a). Si $c > 20$, cualquier $e_i \neq 0$, resulta en pagos negativos, por lo tanto hay un único EN que es $(0, 0)$

b). Si $c = 10$, cualquier $e_i = e_j$ es un EN.

$$EN = \{(e_H, e_S) : e_H = e_S\}$$

Fijemos e_S y veamos que H no se quiere desviar

$$\begin{aligned} U_H(e_H &< e_S, e_S) < U_H(e_H = e_S, e_S) : \; 10e_H < 10e_S \text{ sii } e_S > e_H \\ U_H(e_H &> e_S, e_S) < U_H(e_H = e_S, e_S) : \; 20e_S - 10e_H < 10e_S \text{ dado que } e_H > e_S. \end{aligned}$$

Por simetría lo mismo ocurre para S.

c). La mejor respuesta del hijo es $e_i = e_j$. El padre:

$$\begin{aligned} \max_{e_P} 2(2e_P + e_P^2) - 10\frac{e_P^2}{2} &= 4e_P - 3e_P^2 \\ foc &: 4 - 6e_P = 0 \rightarrow e_P = 2/3 \end{aligned}$$

$$ENPS = \{e_P = 2/3, e_H = e_P\}.$$

d). Si suponemos que todos los EN se juegan equiprobablemente entonces en equilibrio $e_H = 2/3 > E(e_H) = 1/2$.

Nota: Aunque hay un continuo de EN claramente $e_H = e_S = 1$ Pareto domina los demás, por lo que es válido considerar que $e_H^{SECUENC} = 2/3 < e_H^{SIMULTA} = 1$. Cualquier respuesta que **se razone** utilizando criterios de teoría de juegos es considerada una respuesta válida.

3 (25 puntos)

Dos amigos, Carlos y Diego, se plantean comprar el último balón que queda en una tómbola con fines benéficos. Carlos valora el balón en 3 euros y Diego en 6.

Se plantean la siguiente forma de adquirir el objeto: Carlos dice primero una cifra x que será ó 2 ó tres, esto es, $x \in \{2, 3\}$ y, posteriormente, una vez oída la cifra de Carlos, Diego dice otra cifra $y \in \{3, 5\}$. Si $x < y$, Diego compra el balón al precio y; si $y \leq x$, Carlos compra el balón al precio x.

Se pide:

a). (3 puntos) Escriba las estrategias de cada jugador, indicando cuantos conjuntos de información tiene cada uno.

b). (12 puntos) Hallar los equilibrios de Nash y los equilibrios perfectos en subjuegos, todos ellos en estrategias puras.

c). (10 puntos) Considere ahora que las pujas se hacen simultáneamente y que la valoración de Carlos es 10 y no 3. Calcula TODOS los equilibrios de Nash del juego simultáneo.

SOLUCIÓN

a). Carlos dispone de un único conjunto de información y Diego de dos. Por tanto, las estrategias de Carlos son $\{2,3\}$, y las de Diego son $\{33,35,53,55\}$.

b). Aplicando inducción hacia atrás, se cumple:

i) si Carlos elige 2, entonces Diego eligirá 3, que les ofrece unas utilidades de $(0,3)$, y eliminará 5, que les ofrece unas utilidades de $(0,1)$.

ii) si Carlos elige 3, entonces Diego eligirá 5, que les ofrece unas utilidades de $(0,1)$, y eliminará 3, que les ofrece unas utilidades de $(0,0)$.

Y ahora Carlos no eliminará ninguna estrategia, pues todas le dan la misma utilidad: 0.

Así pues, habrá 2 equilibrios de Nash perfectos en subjuegos; a saber:

$$ENPS = \{(2,35),(3,35)\}.$$

Los pagos serán los siguientes:

$$\begin{array}{ccccc} & 33 & 35 & 53 & 55 \\ 2 & \underline{0},\underline{3} & \underline{0},\underline{3} & \underline{0},1 & \underline{0},1 \\ 3 & \underline{0},0 & \underline{0},\underline{1} & \underline{0},0 & \underline{0},\underline{1} \end{array}$$

Por lo tanto, se deduce que hay 4 equilibrios de Nash en la forma normal correspondiente.

c).

$$\begin{array}{ccc} & 3 & 5 \\ 2 & 0,\underline{3} & \underline{0},1 \\ 3 & \underline{7},0 & \underline{0},\underline{1} \end{array}$$

$0 = 7q \rightarrow q = 0$

$3p = 1 \rightarrow p = 1/3$

EN Mixtas: $(p \in [0,1/3]\,,5)$

4 (25 puntos)

Considere el siguiente juego entre un capitalista de riesgo y un empresario. En primer lugar, el capitalista decide si va a invertir (I) sus 10 millones de Euros en el proyecto del empresario o no va a hacerlo (N). Si invierte, el valor total del proyecto es de 20 millones de Euros. Una vez realizada la inversión, el empresario decide cuánto va a pagar el capitalista de estos 20 millones de Euros, esto es, decide $s \in [0, 20]$. Si no hay inversión, la ganancia **neta** es cero para ambos jugadores.

a). (5 puntos) ¿Cuál es el equilibrio perfecto en subjuegos del juego?

b). (15 puntos) Supongamos que el capitalista ha invertido y que la legislación es tal que el empresario está obligado a pagarle al menos su inversión. Para intentar llegar a un acuerdo sobre como repartir el excedente generado por el proyecto (10 millones), se establece el siguiente procedimiento de negociación. El excedente se depositará en el Juzgado hasta que el procedimiento finalice. Acto seguido el capitalista solicitará una cantidad x al Empresario (Ronda 1). Si este último acepta, en ese momento terminarán las negociaciones; en caso contrario pasarán a la segunda negociación (Ronda 2) donde será el Empresario quien ofertará y al capitalista, y éste, oída la oferta, decidirá si aceptar o rechazar. Si esta última oferta es rechazada, será el juez quien determine el reparto a implementar (Ronda 3), si bien ambas partes saben que el juez asignará este dinero a partes iguales. Supondremos que, en caso de indiferencia entre aceptar o rechazar una oferta, ambos jugadores aceptan.

b.1. (5 puntos) Represente el juego en su forma extensiva.

b.2. (10 puntos) ¿Qué posible acuerdo pueden pactar y cuando, si los factores de descuento son $\delta_C = 1$ y $\delta_E = 0$? ¿Qué pagos obtiene cada jugador? Escriba las estrategias en el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos.

c). (5 puntos) ¿Cuál será el reparto en un Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos -no es necesario escribir las estrategias- si $\delta_C = 0$ y $\delta_E = 1$? Compare y discuta los resultados obtenidos en b) y c)

Solución

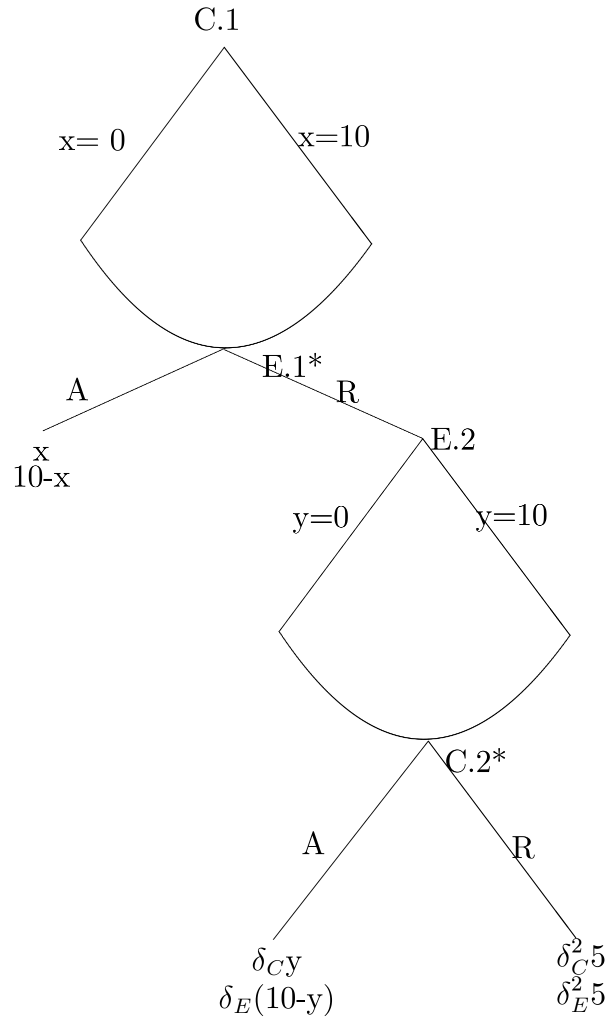
a). Después de observar la inversión del capitalista, la mejor respuesta del empresario en su conjunto de información es darle $s = 0$, por lo que el capitalista obtendrá -10. Entonces el único equilibrio perfecto en subjuegos del juego es $\{N, s = 0\}$.

b). Este juego se puede representar en forma extensiva como en la figura siguiente. Notemos que la tercera ronda, cuando propone el juez, es equivalente a suponer que al rechazar el capitalista en la Ronda 2 él se lleva $\delta_C^2 5$, y el empresario $\delta_E^2 5$. A partir de aquí el juego se resuelve hacia atrás, teniendo en cuenta el factor de descuento a aplicar a cada Ronda.

Lo resolveremos para cualquier par de factores de descuento y después sustituiremos por lo dados en los apartados b) y c).

En la segunda Ronda el capitalista en C.2 estará dispuesto a aceptar cualquier oferta tal que $\delta_C y \geq \delta_C^2 5$ ($y \geq \delta_C 5$), con lo cual el empresario en E.2 ofrecerá $y = \delta_C 5$.

En la Ronda anterior es el empresario quien decide si aceptar o rechazar en E.1*. Si rechaza sabe que obtendrá $\delta_E (10 - 5\delta_C)$, mientras que si acepta obtiene $10 - x$. Entonces en la Ronda 1 para que E acepte: $10 - x \geq \delta_E (10 - 5\delta_C) \rightarrow x \leq 10 - \delta_E (10 - 5\delta_C)$, y así su acción óptima en E.1* es Aceptar sii $x \leq 10 - \delta_E (10 - 5\delta_C)$. Como el capitalista quiere maximizar su propio beneficio, entonces en C.1 escogerá $x = 10 - \delta_E (10 - 5\delta_C)$



Apartado b: $\delta_C = 1$, $\delta_E = 0$

$$ENPS = \{(10, \text{Aceptar sii } y \geq 5), (\text{Aceptar sii } x \leq 10, y \in [0, 10])\}$$

Aparatdo c: $\delta_C = 0$, $\delta_E = 1$ genera pagos (0, 10)

Apartado c:

En b) Reparto (10, 0), en c) Reparto (0, 10): La parte más paciente (mayor δ) obtiene una mayor parte del excedente.