P1	P2	P 3	P4

TEORÍA DE LOS JUEGOS
Examen Enero 2011

INSTRUCCIONES:
Escriba las respuestas en el espacio que hay a continuación de la pregunta. Puede utilizar la parte de detrás de la hoja. La duración del examen es de **2 horas y 15 minutos**.

Nombre:
Grado:
Grupo:

1 (20 puntos)

En el mercado aeronáutico la empresa RINOSA puede elegir entre ampliar su planta de fabricación, o no ampliarla, A o NA. Los beneficios de la elección a tomar estarán en función de si la empresa competidora KASA, innova o no su producto, I o NI. RINOSA sabe los costes de producción finales en caso de ampliar su planta o no ampliarla, los cuales pueden ser bajos o altos, pero KASA no sabe con certeza los costes en los que incurriría su competidora. La probabilidad de que los costes sean bajos es de p, $0 \leq p \leq 1$. Las decisiones de ampliar y no ampliar, innovar y no innovar se toman de forma simultánea, siendo los pagos que enfrentan ambas empresas los siguientes:

$$\underset{\text{Costes Bajos}}{\begin{array}{ccc} & I & NI \\ A & 6,4 & 7,5 \\ NA & 2,8 & 5,5 \end{array}} \qquad \underset{\text{Costes Altos}}{\begin{array}{ccc} & I & NI \\ A & 2,5 & 5,6 \\ NA & 0,10 & 5,5 \end{array}}$$

a). Sea $p = 1$. Calcule todos los Equilibrios de Nash del juego. ¿Maximizan el/los equilibrios encontrados la utilidad social? (5 puntos)

b). Sea $p \in (0,1)$. Calcule los equilibrios Bayesianos de Nash del juego en función del valor de p. (15 puntos)

SOLUCIÓN:

a). ENEP=$\{A, NI\}$ que es un óptimo social.

No hay ENEM: NA está dominada estrictamente, por lo que KASA optará por NI. Alternativamente, hay un único perfil racionalizable.

b). Como podemos comprobar en este supuesto Rinosa tiene estrategias estrictamente dominadas: nunca elegirá las estrategias NA cuando los costes sean bajos.

MR$_R(I) = AA$

MR$_R(NI) = AA$ y ANA

MR de KASA:

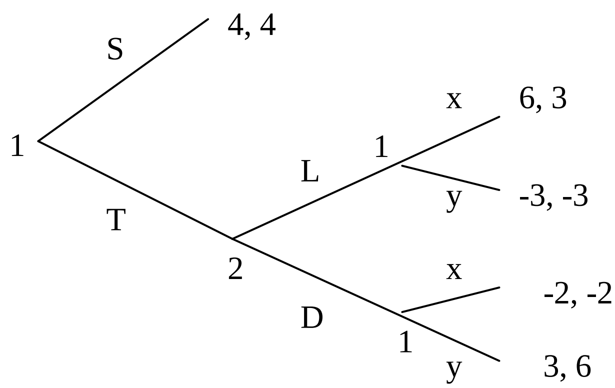
$$\begin{array}{ccc} & AA & ANA \\ I & 4p+5(1-p) & 4p+10(1-p) = \underline{10-6p}_{p\leq 5/6} \\ NI & \underline{5p+6(1-p)} & \underline{5}_{p\geq 5/6} \end{array}$$

Si $p \geq 5/6$ $ENB = \{(ANA; NI), (AA; NI)\}$

Si p‹$5/6$ $ENB = \{(AA; NI)\}$

2 (25 puntos)

La siguiente figura ilustra el árbol de un juego dinámico G entre dos jugadores



a) ¿Cuántos conjuntos de información tiene el jugador 1?, ¿y el jugador 2? Calcule el/los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos (ENPS). (10 puntos)

Suponga ahora que cuando elige su acción el jugador 1 por segunda vez no conoce la acción elegida por el jugador 2.

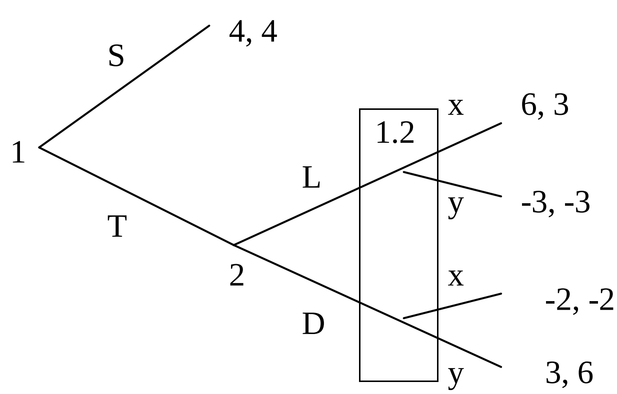
b) Calcule todos los equilibrios de Nash (puras y mixtas) del (de los) subjuego(s) que no sean el juego completo. Calcule análogamente todos los ENPS de este juego.(15 puntos)

Solución:

a) El jugador 1 tiene 3 CI y el 2 uno.

ENPS=$\{(Sxy, D)\}$

B) El jugador 1 tiene 2 CI y el 2 uno.



	L	D
x	$6, 3$	$-2, -2$
y	$-3, -3$	$3, 6$

ENEP subjuego= $\{(x, L), (y, D)\}$)

$6q-2+2q=-3q+3-3q$, $q=\frac{5}{14}$
$3p-3+3p=-2p+6-6p$, $p=\frac{9}{14}$
ENEM subjuego= $\{(\frac{9}{14}x+\frac{5}{14}y, \frac{5}{14}L+\frac{9}{14}D)\}$
$U_1(\frac{9}{14},\frac{5}{14})= 8\left(\frac{5}{14}\right)-2=0.85714$
ENPS=$\{(Tx,L),(Sy,D),(S\frac{9}{14}x+\frac{5}{14}y, \frac{5}{14}L+\frac{9}{14}D)\}$

3 (30 puntos)

Dos empresas, A y B, prestan servicios similares. Ambas empresas pueden elegir la calidad del producto que ofertan. Sea s_A la calidad de A y s_B la calidad de B (($s_i \in [0,5]$ para $i=A,B$)). El tamaño total del mercado (es decir, los ingresos totales que se pueden generar) es de 200 €. La empresa A tiene unos ingresos de $I_A(s_A,s_B)=200[0.5+0.05(s_A-s_B)]+2s_As_B$ y la B de $I_B(s_A,s_B)=200[0.5+0.05(s_B-s_A)]-2s_As_B$. El coste para la empresa A de alcanzar una calidad de s_A es s_A^2, mientras que el coste para la empresa B de s_B es $0.5s_B^2$.

(a) Si las dos empresas compiten en la elección de sus calidades, y lo hacen simultáneamente, ¿Cuales serán las calidades de equilibrio? ¿Cuales serán los beneficios de cada empresa? (12 puntos)

(b) Antes de que las dos empresas elijan calidades, la empresa A puede realizar una campaña de publicidad que cuesta C euros. La publicidad genera un pequeño cambio en los gustos de los consumidores. En concreto, con la campaña de publicidad, los ingresos de la empresa A se convierten en $I_A(s_A,s_B)=200[0.6+0.05(s_A-s_B)]+2s_As_B$ y los ingresos de B se convierten en $I_B(s_A,s_B)=200[0.4+0.05(s_B-s_A)]-2s_As_B$. ¿Para qué valores de C la empresa A realizará la campaña de publicidad en un ENPS? Explique su respuesta. Calcule los beneficios de ambas empresas si A publicita y $C=45$.(10 puntos)

(c) Sea $C=45$. Supongamos ahora que la empresa B incurre en un coste de 40 para entrar en este mercado. La secuencia de movimientos es la siguiente. En primer lugar, la empresa A decide si hacer la campaña de publicidad o no. Tras observar la elección de A, la empresa B decide si entrar o no. Si la empresa B no entra, la empresa A obtiene la totalidad del mercado, esto es, $I_A(s_A)=200$. Si la empresa B entra, ambas compiten entre sí igual que en (a), si no se realiza la campaña de publicidad, o en (b), cuando se realiza. En un ENPS: ¿Debería la empresa A gastar en publicidad? ¿Debería entrar B? Explique su respuesta. ¿Qué beneficio obtiene cada empresa en el ENPS? (8 puntos)

SOL:

(a) Calculamos primera las funciones de mejor respuesta:

$$\frac{\partial}{\partial s_A}\left(200\left(0.5+0.05(s_A-s_B)\right)+2s_As_B-s_A^2\right) \quad\rightarrow\quad s_A=5+s_B$$
$$\frac{\partial}{\partial s_B}\left(200\left(0.5-0.05(s_A-s_B)\right)-2s_As_B-0.5s_B^2\right) \quad\rightarrow\quad s_B=10-2s_A$$

Sustituyendo una en otra $s_A=5+10-2s_A \rightarrow EN=(s_A=5, s_B=0)$

Beneficios: $\Pi_A=125$ and $\Pi_B=50$.

(b) Si hace publicidad la elección de calidades no varía. Sus beneficios serán:

$$\Pi_A=\left(200\left(0.6+0.05(5)\right)-25-C\right)=145-C$$

La empresa A sólo realizará publicidad si $C \leq 20$.

Con publicidad: $\Pi_A = 100$ y $\Pi_B = 30$

(c) Si A realiza publicidad B no entrará pues si B entrara sus beneficios serían -10, y si no entrara serían nulos . En este caso, $s_A = 0$ y $\Pi_A = 200 - 45 = 155$.

Si A no hace publicidad, B si entrará, ya que sus beneficios serán 50-40=10. En este caso, los beneficios de A serán 125.

Por inducción hacia atrás, A hará publicidad ($155 > 125$) y B no entrará.

4 (25 puntos)

Tres barrios tienen que elegir el presupuesto municipal x que será un número entero del conjunto $X = \{0, 1, 2, ..., 99, 100\}$. El barrio azul está representado por el agente A, el barrio blanco por el agente B y el barrio verde por el agente V, cuyas funciones de utilidad son:

$$U_A(x) = 100 - x,\ U_B(x) = x,\ U_V(x) = \begin{cases} 50 & \text{si} \quad x \leq 50, \\ x & \text{si} \quad x \geq 50. \end{cases}$$

El presupuesto actual es $\widehat{x} = 70$.

Las reglas del Municipio son tales que en primer lugar, el agente A propone un presupuesto de $x_1 \in X$. Sabiendo x_1, el agente B propone un presupuesto de $x_2 \in X$. Conocidas ambas opciones, se votará usando la regla de mayoría en una votación en dos rondas. En la primera ronda, se vota entre el presupuesto x_1 y el x_2; en una segunda ronda, el presupuesto ganador de la primera votación se enfrenta al presupuesto inicial $\widehat{x}$. El ganador de la segunda votación será el presupuesto del municipio.

(a) Indique el presupuesto ganador de la segunda ronda si eligen el presupuesto 20 en la primera. ¿Y si eligen 60? ¿Y si eligen 80? Escriba, en cada uno de los 3 casos, un EN en el que ningún votante utilice estrategias débilmente dominadas que soporte los resultados indicados.

Utilizando tus respuestas anteriores, describe el presupuesto que van a elegir en la segunda ronda, dependiendo de cual sea el ganador de la primera. Es decir, si llamamos y al presupuesto ganador de la primera ronda, y llamamos z al presupuesto ganador de la segunda, buscamos la función $z = f(y)$. (12 puntos)

(b) Si A ha propuesto $x_1 = 0$, ¿qué x_2 va a proponer el agente B para que su presupuesto gane a x_1 en la primera ronda de votaciones y a $\widehat{x}$ en la segunda ronda? Repite el ejercicio para $x_1 = 80$.

Utilizando tus respuestas anteriores, encuentra la mejor respuesta del agente B al presupuesto del agente A, es decir el valor de x_2 para todo x_1. (8 puntos)

(c) Dadas tus respuestas a los apartados (a)-(b) indica qué presupuesto se aprobará en un ENPS. Nota: sólo es necesario escribir el recorrido del juego; es decir, los presupuestos x_1 y x_2, así como las votaciones subsiguientes teniendo en cuenta que ningún jugador puede usar estrategias débilmente dominadas. (5 puntos)

SOLUCIÓN:

(a) Hay que observar que el barrio azul siempre va a votar por la alternativa que el barrio blanco no ha votado. Es decir, el barrio azul prefiere presupuestos menores mientras que el barrio blanco prefiere presupuestos mayores. Por lo tanto, el voto de agente V va a determinar el ganador de la 2^a etapa. Por eso, hay que comparar si el ganador de la primera etapa es mayor o menor que 70.

Si el ganador de la primera ronda es 20, el ganador de la segunda ronda es 70. EN= (20,70,70)

Si el ganador de la primera ronda es 60, el ganador de la segunda ronda es 70. EN=(60,70,70)

Si el ganador de la primera ronda es 80, el ganador de la segunda ronda es 80. EN=(70,80,80)

Por lo tanto,

$$z(y) = \begin{cases} 70 & y \leq 70 \\ y & y \geq 70 \end{cases}$$

(b) Si A ha propuesto $x_1 = 0$, el B propone $x_2 \geq 70$. Si $x_1 = 80$, el B propone $x_2 \geq 80$. Si quiere maximizar su utilidad propone 100, de hecho:

$$MR_2(x_1) = \begin{cases} 100 & \text{para todo } x_1 \\ x_2 \in X & \text{si } x_1 = 100 \end{cases}$$

(c) El presupuesto que se aprobará en un ENPS es 100 ya que el recorrido del juego en el ENPS es: A propondrá cualquier x_1 ya que, con todos ellos se aprobará 100, B propondrá un $x_2 = 100$, y las votaciones serán $(x_1, 100, 100)$ en la primera ronda y $(70, 100, 100)$ en la segunda.