P1	P2	P 3	P4

TEORÍA DE LOS JUEGOS
Examen Enero 2010

INSTRUCCIONES:
Escriba las respuestas en el espacio que hay a continuación de la pregunta. Puede utilizar la parte de detrás de la hoja. La duración del examen es de **2 horas**.

Nombre:
Grado:
Grupo:

1 (15 puntos)

Dos vecinos se plantean la construcción de una piscina comunitaria cuyo coste es de 20 unidades (miles de Euros) y cuya construcción es valorada por ambos vecinos en 30 unidades. Acuerdan el siguiente método de decisión. Cada uno envía en un sobre cerrado a un mediador su decisión favorable o no a construir la piscina. Si los dos están a favor se reparten el coste a partes iguales, si sólo uno está a favor éste carga con todo el coste, y si los dos están en contra la piscina no se construye.

a). (5 puntos) Represente este juego en forma matricial y calcule todos sus equilibrios de Nash.

b). (10 puntos) Supongamos ahora que el vecino 1 valora la piscina en 30 unidades siendo esto de conocimiento público, mientras que la valoración del vecino 2 es información privada, pudiendo adoptar los valores 30 o 10. Calcule los equilibrios Bayesianos de Nash de este nuevo juego, si la probabilidad de que la valoración del vecino 2 sea 30 es de γ.

SOLUCIÓN:

a).

	F	NF
F	20, 20	$\underline{10}$, $\underline{30}$
NF	$\underline{30}$, $\underline{10}$	0, 0

EN puras: $\{(F, NF), (NF, F)\}$
EN mixtas: $\{\frac{1}{2}F + \frac{1}{2}NF, \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}NF\}$

b)

V=30	F	NF	V=10	F	NF
F	20, 20	10, $\underline{30}$	F	20, 0	10, $\underline{10}$
NF	30, $\underline{10}$	0, 0	NF	30, -10	0, $\underline{0}$

- Mejor respuesta del 2:

$$\begin{aligned} MR_2(F) &= NF - NF \\ MR_2(NF) &= F - NF \end{aligned}$$

- Mejor respuesta del 1:

$$MR_1(\text{F-NF}) = \begin{cases} \text{F} & \text{si} \quad \gamma \leq 1/2 \\ \text{NF} & \text{si} \quad \gamma \geq 1/2 \end{cases}$$

-ENB:

$$ENB = \begin{cases} \text{(F,NF-NF)} & \text{para todo } \gamma \\ \text{(NF,F-NF)} & \text{si } \gamma \geq 1/2. \end{cases}$$

2 (25 puntos)

Miguel y Antonio se enfrentan a la siguiente situación ante el descenso en piragua del río Sella. Miguel debe elegir entre descender (D) o no descender (ND). Si Miguel elige no descender el Sella, el recibirá unos pagos de $2A$ y Antonio de $3A$. Si elige descender, ambos participantes podrán decidir simultáneamente el tipo de piragua a utilizar en el descenso, bien rígida (R) o flexible (F). La matriz de pagos del juego simultáneo es

Mig\Ant	R	F
R	2, 0	1, -2
F	0, -1	3, 4

a). (10 puntos) Encuentre todos los equilibrios de Nash (en estrategias puras y mixtas) del juego simultáneo que comienza si Miguel realiza el descenso (D) así como los niveles de utilidad que alcanzan Miguel y Antonio en los equilibrios de Nash encontrados.

b). (5 puntos) Encuentre todos los pagos de Miguel asociados a la acción ND (todos los valores de A) para los que Miguel escogerá siempre D en todos y cada uno de los ENPS del juego. Escriba **todos** los ENPS para dichos valores de A.

c). (10 puntos) Supongamos ahora que Antonio puede observar el tipo de piragua que ha elegido Miguel, antes de optar por la suya. Encuentre todos los valores de A para los que en todos y cada uno de los ENPS de este nuevo juego Miguel desciende el Sella.

SOLUC:

a)

Mig\Ant	R	F
R	$\underline{2}$, $\underline{0}$	1, -2
F	0, -1	$\underline{3}$, $\underline{4}$

ENEP= (R,R) Y (F,F) con pagos (2,0) y (3,4)

ENEM= (5/7 R + 2/7 F ; $\frac{1}{2}$ R + $\frac{1}{2}$ F) con pagos (1.5 , –2/7=0.28)

Utilidades de Miguel: 2, 3 y 1.5

Utilidades de Antonio 0, 4 y -0.28

b) Para A < 0.75 ($2A < 1.5$). Los ENPS son: (DR,R) con pagos (2, 0)

(DF,F) con pagos (3, 4)

(D5/7 R + 2/7 F ; $\frac{1}{2}$ R + $\frac{1}{2}$ F) con pagos (1.5, -0.28)

c). $A < 1.5$: En equilibrio Antonio elige RF con pagos (2, 0) y (3, 4) . Miguel en su segundo CI elige F, por lo que escogerá siempre D en su primer CI sii $2A < 3$.

3 (30 puntos)

Las empresas *Andesa* y *Bertrola* (A y B) van a competir a la Cournot en la producción de placas solares a partir de Junio de 2010. Para ello deben decidir simultáneamente que tecnología de las dos disponibles en el mercado van a adoptar. Una de ellas es gratuita, y permite producir placas solares a un coste por unidad de 100; la otra tecnología cuesta 2500 y permite producir placas a un coste unitario de 50. Las decisiones adoptadas serán anunciadas en el BOE del primer lunes de Mayo. La función de demanda de placas solares es $P(Q) = 200 - Q$, donde $Q = q_A + q_B \in [0, 200]$.

a). (18 puntos) Encuentre el/los equilibrio de Nash perfecto(s) en subjuegos en estrategias puras de este juego, y escríbelo(s).

b). (12 puntos) Supongamos que ambas empresas han optado por la tecnología gratuita. El día 1 de Junio el objetivo de la empresa A sigue siendo maximizar sus beneficios pero la empresa B ha cambiado su Consejo y éste ya no se preocupa por los beneficios, sino por la diferencia entre su producción y la de la empresa A. Más concretamente, el nuevo Consejo tiene la función de pagos

$$U_B(q_A, q_B) = (q_B - q_A)^2.$$

Calcule el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) del nuevo juego si la empresa B se ha convertido en líder del mercado, de forma tal que la empresa A observa qué cantidad ha elegido la empresa B antes de elegir la suya. ¿Cuánto produce cada empresa en ENPS?

SOL:

Podemos identificar las acciones en la primera etapa con los costes marginales asociados a las dos tecnologías (50 y 100), o con las tecnologías y pensar que las acciones son Grat (optar por la tecnología gratuita) y N Grat (optar por la tecnología que cuesta 2500). En estas soluciones optamos por identificar las acciones como 50 ó 100.

Etapa 2: $\max_{q_i}(200 - q_i - q_j - c_i)q_i$

$$q_i = \frac{200 - c_i - q_j}{2}$$

$$\begin{aligned} EN &: \quad q_i = \frac{200 - 2c_i + c_j}{3} \\ \pi_i^{EN} &= q_i^2 \end{aligned}$$

Hay 4 subjuegos en la etapa 2 correspondientes a (50,50), (50, 100), (100,50) y (100,100). Sus EN en la etapa 2 son

$$\left\{ (50, 50), (\frac{200}{3}, \frac{50}{3}), (\frac{50}{3}, \frac{200}{3}), (\frac{100}{3}, \frac{100}{3}) \right\}$$

Etapa 1:

	50 (N Grat)	100 (Grat)
50 (N Grat)	$0, 0$	$\frac{17500}{9}, \frac{2500}{9}$
100 (Grat)	$\frac{2500}{9}, \frac{17500}{9}$	$\frac{10\,000}{9}, \frac{10\,000}{9}$

$$\begin{aligned} ENPS &= \left((50_{(NG)}, 50, \frac{200}{3}, \frac{50}{3}, \frac{100}{3}), (100_{(G)}, 50, \frac{50}{3}, \frac{200}{3}, \frac{100}{3}) \right) \text{ y} \\ &\left((100_{(G)}, 50, \frac{200}{3}, \frac{50}{3}, \frac{100}{3}), (50_{(NG)}, 50, \frac{50}{3}, \frac{200}{3}, \frac{100}{3}) \right) \end{aligned}$$

b) La empresa A tiene la misma función de reacción que en a) esto es

$$q_A = \max\left\{\frac{100 - q_B}{2}, 0\right\}$$

La empresa B maximiza una función convexa, por lo que en ENPS tenemos $(q_B = 200, q_A = 0)$.

4 (30 puntos)

Dos locales de música en vivo, Amadeus y Bachata, comparten la misma zona y cuentan con una clientela fiel, estimada en 100 personas por noche en el caso de Amadeus y 50 en el caso de Bachata.

Ambos locales se plantean contratar o no a un músico famoso, que atraerá más clientela siempre y cuando el local de al lado no elija la misma estrategia. Concretamente, el local Amadeus puede contratar por una sola noche a la estrella del piano Nizalbe, y el local Bachata a la estrella de la canción Lizza. Si Amadeus contrata a Nizalbe y Bachata decide no contratar, Amadeus tendrá 40 clientes más y Bachata perderá a 10 de los suyos. Asimismo, si Bachata contrata a Lizza cuando Amadeus no ha contratado música en vivo, el número de sus clientes aumentará en 50, pero Amadeus perderá 30. Finalmente, si ambos locales contratan a músicos famosos (esto es, Amadeus a Nizalbe y Bachata a Lizza), el número de sus clientes aumentará en 20 y 10 personas, respectivamente. El beneficio que deja cada cliente se puede estimar en 10 euros para Amadeus y en 20 euros para Bachata. LLamemos N y L a los precios en euros de contratar a Nizalbe y a Lizza, respectivamente, siendo $200 < L < 400$ y $200 < N < 400$.

a). (8 puntos) Represente el juego anteriormente citado, discutiendo cuales serán los equilibrios de Nash en estrategias puras, dependiendo de los valores N y L.

b). (7 puntos) Ambos locales se plantean añadir a las opciones anteriores una nueva alternativa: la barra libre. Si sólo uno de ellos opta por introducir la barra libre se quedará con todos los clientes, tanto si hay música en vivo en el otro local como si no. En cambio, si ambos introducen la barra libre, los clientes se mantendrán en su local preferido. El coste de la barra libre es de 200 euros para Amadeus y de 100 euros para Bachata. Encuentre el perfil de estrategias racionalizables de este nuevo juego.

c). (15 puntos) Supongamos ahora que los locales compiten no durante una noche, sino indefinidamente, y que la barra libre ha sido prohibida por las autoridades sanitarias del país. ¿Para qué valores del descuento temporal δ es posible encontrar un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos cuyo resultado sea que ambos locales no contratan a ningún músico cuando $L = N = 300$? Escriba las estrategias que lo permiten.

SOLUCIÓN

a) El juego en forma normal es el siguiente, de forma que el equilibrio de Nash del juego, jugado una sola noche, es $(Cont, Cont)$.

$$\begin{array}{ccc}
 & Cont & NoCont \\
Cont & \underline{1200 - N}, \underline{1200 - L} & \underline{1400 - N}, 800 \\
NoCont & 700, \underline{2000 - L} & 1000, 1000
\end{array}$$

b) Hay un único perfil de estrategias racionalizables por lo que el juego tiene un único EN en estrategias dominantes.

	$Cont$	$NoCont$	BL
$Cont$	$1200-N, 1200-L$	$1400-N, 800$	$-N,\ \underline{2900}$
$NoCont$	$700, 2000-L$	$1000, 1000$	$0, \underline{2900}$
BL	$\underline{1300}, -L$	$\underline{1300}, 0$	$\underline{800}, \underline{900}$

c) Estrategias de ambos jugadores:

-En $t=1$ jugará No contratar (NC)

-En cualquier otro t :

-Jugara NC si observó $(NoCont, Nocont)$ en todo período s, $s=1,...,t-1$

-Jugará $Contratar$ si en alguna etapa anterior no se jugó $(NoCont, Nocont)$

Las estrategias descritas anteriormente serán un eq. de Nash sii:

$$1000/(1-\delta) \geq 1700 + 900\delta/(1-\delta) \Longleftrightarrow \frac{7}{8} \leq \delta$$

En los subjuegos que siguen a algo distinto de $(NoCont, NoCont)$ se juega un EN ya que se juega el EN del juego de etapa. Los subjuegos que siguen a $(NoCont, NoCont)$ son como el juego completo por lo que EN sii $\frac{7}{8} \leq \delta$.

Si $\frac{7}{8} \leq \delta$ en todo subjuego se juega un EN$\rightarrow$ Las estrategias constituyen un ENPS.