Universidad Carlos III de Madrid
TEORÍA DE LOS JUEGOS
Lista de ejercicios de juegos repetidos y bayesianos

1. Considere el juego del gallina que se muestra en la página de la asignatura: Notas y enlaces > Juegos repetidos un número finito de veces > Transparencia 14. Suponga que se repite tres veces y encuentre una estrategia gatillo que permita sostener (P, P) en las dos primeras repeticiones y que sea un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. Nota: asegúrese de que la estrategia gatillo define bien qué jugar en cada subjuego posible.

2. Considere el siguiente juego en forma normal:

		Jugador 2		
		C	N	P
	C	6, 6	0, 9	0, 0
Jugadora 1	N	9, 0	3, 3	0, 0
	P	0, 0	0, 0	1, 1

(a) Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias puras.

Suponga ahora que se juega dos veces este juego. Después de la primera vez, los jugadores observan lo que ha ocurrido y vuelven a jugar, de manera que pueden condicionar su acción en la segunda vez a lo ocurrido en la primera. Los pagos finales son la suma de los pagos de cada repetición.

(b) ¿Existe algún equilibrio de Nash perfecto en subjuegos que implique jugar el perfil (C, C) la primera vez?

Suponga ahora que el juego se juega tres veces.

(c) ¿Existe algún equilibrio de Nash perfecto en subjuegos que implique jugar el perfil (C, C) la primera vez?
(d) ¿Existe alguno que implique jugar (C, C) las dos primeras veces?
(e) Conteste (c) y (d) si el juego se repite cuatro veces.

3. En el mercado de telecomunicaciones de un país hay dos empresas que enfrentan la siguiente demanda

$$P(q_a, q_b) = 160 - q_a - q_b.$$

Los costes de producción son iguales para las dos empresas y vienen dados por la función $C(q) = 40q$.

(a) Halle el equilibrio de Nash de este juego cuando las empresas seleccionan cantidades simultáneamente solo una vez.
(b) Halle un tipo de descuento y un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos para el cual las empresas hacen colusión, (se reparten a medias el máximo beneficio total posible dada esa demanda) si el juego se repite infinitamente.
(c) Encuentre una estrategia tal que en cada periodo las empresas producen (q_a, q_b) con $q_a + q_b = Q^M$, donde Q^M es la cantidad de monopolio, $q_a > q_b$, and la

estrategia es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos para algún factor de descuento.

4. Considere el dilema del prisionero descrito a continuación:

	C	D
C	1, 1	5, 0
D	0, 5	4, 4

En el juego repetido (finitas o infinitas veces) la estrategia *toma y daca* (*tit for tat*) se define así:

- En $t = 1$ se juega (C, C).
- En $t > 1$ el Jugador i juega lo que el Jugador j jugó en $t - 1$ ($i, j = 1{,}2$, $i \neq j$).

(a) Muestre que esta estrategia no es un equilibrio de Nash del juego repetido finitas veces. Nota: comience por considerar que se repite dos veces.

Suponga ahora que el juego se repite infinitas veces. Nota: en las preguntas a continuación, muestre únicamente los pagos día a día. No es necesario calcular la suma descontada.

(b) ¿Cuáles son los pagos de los jugadores si siguen la estrategia *tit for tat*?
(c) ¿Cuáles son los pagos de los jugadores si el Jugador 1 se desvía en el primer periodo?
(d) ¿Cuáles si el Jugador 1 se desvía en los dos primeros periodos?
(e) ¿En los tres primeros?
(f) ¿En los cuatro primeros?
(g) ¿En los cinco primeros?
(h) ¿En el primero y en el tercero?

5. Suponga que dos sospechosos se enfrentan en el dilema del prisionero, con la complicación añadida de que un sospechoso no sabe si el otro es un hombre de honor. Se sabe que el Sospechoso 1 es un hombre sin honor con seguridad, pero no está claro que el Sospechoso 2 lo sea. Si el Sospechoso 2 es un hombre sin honor, los pagos tienen la forma habitual en este juego:

		Sospechoso 2	
		Confesar	*No Confesar*
Sospechoso 1	*Confesar*	1, 1	15, 0
	No Confesar	0, 15	10, 10

Por el contrario si el Sospechoso 2 es un hombre de honor, preferiría pasar 20 años en la cárcel antes que delatar a su colega. Más aún, incluso al Sospechoso 1 le sentaría mal delatar a alguien tan honrado. Por tanto, si el Sospechoso 2 es un hombre de honor los pagos son:

		Sospechoso 2	
		Confesar	*No Confesar*
Sospechoso 1	*Confesar*	1, 1	5, 20
	No Confesar	0, 15	10, 30

Denote por p la probabilidad de que el Sospechoso 2 sea un hombre de honor. Considere que $p \in (0,1)$.

(a) Identifique las estrategias dominantes para el Sospechoso 2 en el juego.
(b) Identifique los equilibrios de Nash bayesianos de este juego para cada valor de p.

6. Un delantero y un portero se enfrentan en un penalti. El delantero es muy buen tirador y, si engaña al portero, marca siempre el gol. El portero puede ser muy bueno o regular con iguales probabilidades. Si es muy bueno, parará siempre que no le engañe el delantero. Si es regular, parará solamente la mitad de las veces que no le engañe. Más específicamente, el delantero puede tirar hacia la izquierda (*I*) o hacia la derecha (*D*). El portero puede también saltar hacia la izquierda (*I*) o hacia la derecha (*D*). Que el delantero engañe al portero significa que, p.ej., el portero ha tirado a la izquierda y el portero ha saltado a la derecha o viceversa. Si el delantero marca, tiene un pago de 1 y el portero, de -1. Si no marca, los pagos se intercambian.

(a) Muestre el juego bayesiano, con todos sus elementos definidos (indique los pagos en forma matricial).
(b) Muestre que el juego no tiene ningún equilibrio de Nash bayesiano en estrategias puras.
(c) Muestre que $\left(\frac{1}{2}[I] + \frac{1}{2}[D];\ \left(\frac{1}{2}[I] + \frac{1}{2}[D],\ \frac{1}{2}[I] + \frac{1}{2}[D]\right)\right)$ es un equilibrio de Nash bayesiano en estrategias mixtas. (La primera componente del equilibrio es la estrategia del delantero y la segunda, la del portero, con una acción por tipo).

7. Dos amigos comparten un apartamento. Tienen que decidir cómo dividir un total de 6 horas entre limpiar, s_i, y ver televisión, $6 - s_i$, $(i = 1,2)$. A cada uno le importa que el apartamento esté limpio, pero también disfrutan viendo televisión. La función de utilidad para el Jugador 1 es la siguiente:

$$u_i(s_1, s_2) = (s_1 + s_2) + (6 - s_i) + (6 - s_i)(s_1 + s_2).$$

La utilidad del Jugador 2 es

$$u_2(s_1, s_2) = a(s_1 + s_2) + (6 - s_2) + (6 - s_2)(s_1 + s_2).$$

El primer término es la utilidad procedente de tener un apartamento limpio, el segundo es la utilidad directa derivada de ver la televisión y el último término refleja el hecho de que la utilidad de ver la televisión aumenta con la limpieza del apartamento. El parámetro a en la utilidad del Jugador 2 puede tomar los valores 1 y 4 con probabilidades 1/3 y 2/3, respectivamente. El Jugador 2 sabe el valor de a, pero el Jugador 2 no, aunque sí sabe la distribución de probabilidad sobre los posibles valores.

(a) Identifique los elementos en la descripción anterior que permiten definir un juego bayesiano.
(b) Encuentre los equilibrios de Nash bayesianos del juego.

8. Considere un duopolio de Cournot que opera en un mercado con la función inversa de demanda $p(q) = 10 - q$, donde q es la cantidad agregada en el mercado. Los costes de la Empresa 1 son $c_1(q_1) = 8q_1$ con probabilidad 1/2 y $c_1(q_1) = 0$ con probabilidad 1/2. Los costes de la Empresa 2 son $c_2(q_2) = (q_2)^2$. La Empresa 1 conoce sus costes, pero no así la Empresa 2 que, sin embargo sí sabe los tipos de coste que puede tener y sus probabilidades. Todo lo anterior es de conocimiento común.

(a) Represente esta situación como un juego bayesiano. Es decir, indique el conjunto de jugadores, el conjunto de sus tipos, las creencias, estrategias y utilidades.
(b) Calcule el equilibrio de Nash bayesiano del juego anterior. Calcule también los beneficios en el equilibrio.
(c) Considere el tipo de Empresa 1 con costes bajos ($c_1(q_1) = 0$), ¿ganaría algo si puede informar de manera creíble (aportando pruebas) a la Empresa 2 de cuál es su tipo? ¿Y el tipo con costes altos? ¿Cómo afecta esta posibilidad al equilibrio?
(d) Suponga que la Empresa 1 sólo tiene su palabra (sin pruebas) para convencer a la Empresa 2 de cuál es su tipo. ¿Tiene algún tipo incentivos a mentir a la Empresa 2?

Otros ejercicios

9. Considérese el siguiente juego en forma normal:

	A	*B*	*C*
A	3, 3	x, 0	-1, 0
B	0, x	4, 4	-1, 0
C	0, 0	0, 0	1, 1

(a) Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias puras para los distintos valores de x.

Suponga ahora que se juega dos veces este juego. Después de la primera vez los jugadores observan lo que ha ocurrido y vuelven a jugar. Los pagos finales son la suma de los pagos de cada repetición.

(b) Sea $x = 5$ ¿Es (B, B) un EN del juego cuando solo se juega una vez? ¿Se puede encontrar un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos que implique jugar (B, B) en la primera etapa? En caso afirmativo, escriba las estrategias de los dos jugadores que les permitiría alcanzar ese equilibrio. En caso negativo, explique por qué no, utilizando para ello la definición de equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.
(c) Sea $x = 7$ ¿Se puede encontrar un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos que implique jugar (B, B) en la primera etapa? En caso afirmativo, escriba las estrategias de los dos jugadores que les permitiría alcanzar ese equilibrio. En caso negativo, explique por qué no.

10. Sea el juego en forma normal G cuyos pagos están resumidos en la matriz de pagos:

	L	R
A	1, 1	8, 0
B	0, 5	3, 3

Considere el juego G repetido infinitas veces. ¿Cuál es el factor de descuento más pequeño necesario para que los pagos medios en un equilibrio perfecto en subjuegos sean (3, 3) y cuáles son las estrategias que sostienen este equilibrio?

11. Considere un duopolio de Cournot que opera en un mercado con la función inversa de demanda $p(q) = a - q$, donde $q = q_1 + q_2$ es la cantidad agregada en el mercado. Ambas empresas tienen costes nulos. La demanda es incierta: puede ser alta $(a = 12)$ o baja $(a = 6)$ con idénticas probabilidades. La información es asimétrica: la Empresa 1 sabe si la demanda es alta o baja, pero no así la Empresa 2. Todo lo anterior es de conocimiento común.

(a) Represente esta situación como un juego bayesiano.
(b) Calcule el equilibrio de Nash bayesiano y los beneficios en el equilibrio.

12. Un ejecutivo decide ir a comer a Casa Pepe. Le atiende un camarero, que puede darle buen o mal servicio. El ejecutivo, tras observar cómo le han atendido, decide si dar o no una propina. Al camarero le gusta que le den propina, pero le cuesta esmerarse en el trabajo. A su vez, al ejecutivo le gusta que le atiendan bien y preferiría no dar la propina. Cada uno maximiza su valor esperado. Para concretar, suponga que las posibles propinas son 2 euros o cero. Para el ejecutivo el buen servicio tiene un valor de 6, y el mal servicio, cero. Al camarero le cuesta dar buen servicio 1 y mal servicio, cero.

(a) Dibuje este juego en forma extensiva.
(b) ¿Cuántas estrategias tiene el ejecutivo?
(c) ¿Sería un equilibrio de Nash el que el ejecutivo decidiera pagar una propina solo si le dieran buen servicio y que el camarero diera buen servicio? Razone muy brevemente.
(d) Exprese este juego en forma estratégica o normal.
(e) Indique qué afirmaciones de las siguientes son correctas:
   i) Para el camarero, dar buen servicio es una estrategia dominante.
   ii) No dar nunca propina, independientemente de si le atienden bien o mal, es una estrategia dominante para el ejecutivo.
   iii) Está claro que lo mejor para el ejecutivo es dar propina si le atienden bien y no darla si le atienden mal.
   iv) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.
(f) Indique el equilibrio de Nash en estrategias puras de este juego.
(g) Indique si el equilibrio en (f) da lugar a una asignación Pareto eficiente. Si la respuesta es negativa, indique una combinación de estrategias que de lugar a una asignación Pareto superior a la de equilibrio.

Suponga ahora que el ejecutivo va a comer a este restaurante todas las semanas y que siempre le atiende el mismo camarero. Cada uno maximiza su valor esperado y nadie descuenta sus pagos futuros (es decir, un euro hoy vale lo mismo que un euro en el futuro). En este caso podrían llegar al siguiente acuerdo verbal: El camarero empieza por dar buen servicio y lo seguirá haciendo en el futuro si recibe propina, pero si el ejecutivo no le recompensa una semana, nunca más le volverá a atender bien. El ejecutivo le dará propina siempre que reciba un buen servicio, pero si alguna vez no le atiende bien dejará de pagar la propina para siempre. Si es por todos conocido que el camarero se va a la mili el día primero del próximo mes.

(h) ¿Se cumplirá el acuerdo en algún equilibrio de Nash perfecto en subjuegos?

13. Calcule los equilibrios Bayesianos de Nash en estrategias puras del siguiente juego bayesiano estático:

- El Jugador 1 puede elegir entre dos acciones, A y B. El Jugador 2 puede elegir entre dos acciones, I y D.
- Los pagos dependen de los tipos de jugadores. El jugador 1 es de un solo tipo y este es conocido por ambos.
- El Jugador 2 puede ser del tipo x o de tipo y. El Jugador 2 sabe su tipo pero el Jugador 1 no sabe con certeza el tipo del Jugador 2.
- El Jugador 1 piensa que el Jugador 2 es del tipo x con probabilidad 2/3, y del tipo y con probabilidad 1/3.
- Las ganancias se dan a continuación.

Tipo x

	I	D
A	4, 1	3, 3
B	3, 6	2, 3

Tipo y

	I	D
A	3, 6	1, 3
B	1, 1	5, 3

14. El juego del gallina resultará familiar a los que hayan visto West Side Story o Rebelde sin causa. Una versión simplificada de este juego es la siguiente. Dos jugadores se lanzan en sus respectivos coches a toda velocidad el uno contra el otro. Las acciones que pueden realizar son dos girar o continuar recto. Los pagos son los que representamos a continuación.

		James Dean	
		Continuar	*Girar*
El Malo	*Continuar*	-3, -3	2, 0
	Girar	0, 2	1, 1

(a) Encuentre los equilibrios de Nash de este juego.

Suponga ahora que todo el mundo sabe que las preferencias de Dean son como en el problema anterior, pero que existen serias dudas sobre la cordura de El Malo, hasta el punto de que algunos piensan que es de los que no giran nunca, ni aunque le vaya la vida en ello. Dicho más formalmente, los pagos son como arriba con probabilidad p y son como se indica a continuación con probabilidad $1-p$.

		James Dean	
		Continuar	*Girar*
El Malo	*Continuar*	2, -3	2, 0
	Girar	0, 2	1, 1

(b) Encuentre los equilibrios de Nash bayesianos en estrategias puras de este juego.

15. Dos pujadores participan en una subasta para adquirir un cuadro. Sus valoraciones por el mismo pueden ser 20 o 100, siendo ambas equiprobables. Cada individuo conoce su valoración, pero desconoce la del rival. Las pujas admisibles son $\{10, 30, 50\}$. Considere solo equilibrios en los que los jugadores no usan estrategias débilmente dominadas.

(a) Encuentre los equilibrios bayesianos de Nash en la subasta al primer precio.
(b) Encuentre los equilibrios bayesianos de Nash en la subasta al segundo precio.
(c) Compare los ingresos del subastador en cada tipo de subasta.

16. Considere el siguiente modelo de duopolio de Bertrand con productos diferenciados e información asimétrica. La demanda de la Empresa i es $q_i(p_i, p_j) = 10 - p_i - b_i p_j$. Ambas empresas tienen costes nulos. El efecto del precio del bien producido por la Empresa 2 en la demanda del bien de la Empresa 1 puede ser grande o pequeño. En concreto, b_1 puede tomar los valores 0 y 1 con probabilidades 2/3 y 1/3, respectivamente. Además, $b_2 = 0$. Cada empresa conoce su propio parámetro b_i, la Empresa 1 conoce, además, b_2, pero la Empresa 2 no conoce b_1. Todo lo anterior es de conocimiento común.

(a) ¿Cuáles son las estrategias de cada empresa?
(b) Calcule el equilibrio de Nash bayesiano.

17. Calcule los equilibrios bayesianos de Nash en estrategias puras del siguiente juego bayesiano estático. Las ganancias de dos jugadores, a los que llamamos *A* y *B*, son como en el Juego 1 o como en el Juego 2, siendo cada juego igualmente probable. El Jugador *A* es informado de cuál es el juego elegido, pero el jugador *B* no sabe cuál de los dos juegos está jugando. El jugador *A* elige *x* o *y*; simultáneamente, el Jugador *B* elige *m* o *n*.

Juego 1

	m	*n*
x	1, 1	0, 0
y	0, 0	0, 0

Juego 2

	m	*n*
x	0, 0	0, 0
y	0, 0	2, 2

18. Una empresa (Jugadora 1) está establecida en un mercado y debe decidir si construir o no una nueva planta. Los potenciales beneficios de esta acción dependen de si otra empresa (Jugadora 2) entra o no en el mercado. La Jugadora 2 tiene incertidumbre acerca de los costes de construir la planta que enfrenta la Jugadora 1, que pueden ser altos o bajos con probabilidades estimadas en 1/3 y 2/3 respectivamente. La Jugadora 1 conoce sus costes. Las decisiones de construir (*C*) o no construir (*NC*) y entrar (*E*) o no entrar (*NE*) se toman simultáneamente. Los pagos se muestran a continuación.

Costes altos

	E	*NE*
C	0, -1	15, -1
NC	2, 1	3, 0

Costes bajos

	E	*NE*
C	1,5, -1	3,5, 0
NC	2, 1	3, 0

Encuentre los equilibrios de Nash bayesianos de este juego.

19. Eva y Bernardo son los únicos participantes en una subasta simultánea (a sobre cerrado) por un objeto. La subasta se realiza de acuerdo con las siguientes reglas:

- Cada jugador solo puede pujar o bien 100 o bien 200 euros.
- Una vez realizadas las pujas se da el objeto al jugador que haya pujado la cantidad mayor, y en caso de empate se decide a cara o cruz quien se lo lleva.
- El ganador paga la puja que ha realizado.

Los dos jugadores saben que Eva valora el objeto en 300. Pero el azar decide el tipo de Bernardo, y solo Bernardo conoce su verdadera valoración del bien, que puede ser 150 o 250 euros. La probabilidad de cada tipo de Bernardo es 1/2. Calcule los equilibrios de Nash bayesianos de este juego.