Universidad Carlos III de Madrid
TEORÍA DE LOS JUEGOS
Lista de ejercicios de juegos estáticos

1. Dos empresas automovilísticas deciden lanzar al mercado al mismo tiempo un modelo de coche. Cada una de ellas se está planteando si ofrecer o no financiación a los clientes. Esto les supondría captar mayor cuota de mercado, pero llevaría consigo ciertos costes. Ambas empresas prefieren no ofertar dicha financiación, pero cada una teme que la otra la ofrezca y, por tanto, acapare mayor número de compradores. Supongamos que los beneficios esperados por las empresas son los siguientes. Si ninguna ofrece financiación, cada una ganará 800 millones. Si ambas la ofrecen, cada una gana 600 millones, mientras que si una la ofrece y la otra no, la primera gana 900 y la segunda 400.

(a) Represente el juego en forma normal.
(b) ¿A qué juego de los vistos en clase se parece?

2. Freedonia es un país que necesita asistencia financiera y solamente puede acudir a la Unión Pangeana (UP), de la que forma parte. A cambio de la financiación, la UP le pide que acometa una serie de medidas fiscales y de reformas. El gobierno de Freedonia propone un paquete de medidas distinto (básicamente, reformas menores). Cada parte cree que su propuesta es la mejor y que la otra llevaría al desastre. Así, tanto Freedonia como la UP pueden empeñarse en su proyecto o ceder. Si ambos ceden se establecerá una negociación de la que se espera un resultado insatisfactorio para ambas partes, pero mejor que lo que ocurriría en caso de que ambas se empeñaran y no hubiera acuerdo, que sería la peor situación para ambas partes. Por supuesto, cada una de las partes prefieren mantenerse en su posición y que sea la otra parta la única que hace concesiones.

(a) Represente el juego en forma normal.
(b) ¿A qué juego de los vistos en este capítulo se parece?

3. El popular juego *Piedra, papel, tijeras* se juega entre dos jugadores. Cada jugador elije uno de los tres objetos y se gana según estas reglas: piedra gana a tijeras, tijeras gana a papel y papel gana a piedra. En caso de elegir el mismo objeto, hay empate. Describa el juego en forma normal.

4. Guillermo y Miguel comparten un piso donde cada uno tiene su habitación. A la hora de decorarlo, cada uno tiene que decidir cómo distribuir sus pertenencias. En concreto, cada uno tiene dos cuadros y debe decidir cuántos colgar en su habitación y cuántos en la sala común. Supóngase que la decisión es privada y que una vez que se cuelgan los cuadros ya no es posible cambiarlos de lugar. Sea x_G y x_M el número de cuadros que Guillermo y Miguel, respectivamente, deciden poner en su habitación (por tanto, $x_S = 4 - x_G - x_M$ es el número de cuadros que se cuelgan en la sala). La función de utilidad de Guillermo es $u_G(x_G, x_S) = x_G(1{,}5 + x_S)$ y la de Miguel es $u_M(x_M, x_S) = x_M(1{,}5 + x_S)$. Así, por ejemplo, si Miguel cuelga un cuadro en su habitación y Guillermo dos en la suya ($x_M = 1, x_G = 2, x_S = 1$) obtendrían una utilidad de $u_M = 2{,}5$ y $u_G = 5$.

(a) ¿Cuáles son las estrategias de cada uno de los compañeros de piso?

(b) Represente el juego. Es decir, describa en la usual matriz de doble entrada las utilidades para cada jugador de cada una de las posibles distribuciones de los cuadros, fruto de las estrategias que sigan ambos.

5. Considere el juego del dilema del prisionero visto en clase.

(a) Muestre cómo quedaría el juego si un año de cárcel del otro jugador causa tanto daño como medio año propio, pero solamente si el otro jugador no ha confesado.
(b) Repita el apartado (a) para el caso en que solo el Jugador 1 tenga las preferencias altruistas descritas en (a), mientras que el Jugador 2 tiene las preferencias originales del dilema del prisionero.

6. Resuelva estas cuestiones:

(a) Encuentre el equilibrio de Nash en los ejercicios 4 y 5.
(b) En el Ejercicio 5, ¿cuánto daño debería causar cada año de cárcel del compañero (siempre en caso de que no haya confesado) para que el único equilibrio sea que ninguno confiese?

7. Dado el siguiente juego en forma normal:

	L	R
T	4, 4	0, 2
M	2, 1	1, 0
B	a, b	c, 1

(a) ¿Para qué valores de a, b y c, la combinación de estrategias (B, L) resulta de la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas?
(b) ¿Para qué valores de a, b y c, la combinación de estrategias (B, L) es el único equilibrio de Nash en estrategias puras?

8. La municipalidad de Madrid está organizando una operación llamada *Madrid Verde*. En una calle de Chamartín, cada familia que posee una casa recibe dos árboles. Solo dos vecinos viven en esa calle. Cada uno debe decidir cuantos árboles plantar en su jardín (en cuyo caso los árboles no se pueden ver desde la calle) y cuantos en la entrada de su casa (en cuyo caso los árboles se ven desde la calle). Los árboles que se pueden ver desde la calle contribuyen a revalorizar el barrio. El Vecino 2 valora más que el Vecino 1 los árboles que se ven desde la calle ya que tiene la intención de vender su casa próximamente. Se supone que la decisión es privada y que una vez que se plantan los árboles, ya no es posible cambiarlos de lugar. Sean x_1 y x_2 el número de árboles que el Vecino 1 y el Vecino 2, respectivamente, deciden poner en su jardín. Sea x_C el número de árboles que se pueden ver desde la calle. La función de utilidad del Vecino 1 esta dada por $U_1(x_1, x_c) = x_1(1{,}5 + x_c)$ y la del Vecino 2 por $U_2(x_2, x_c) = x_2(1{,}5 + ax_c)$, donde $a > 1$.

(a) Represente este juego en forma normal y encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.
(b) ¿Maximizan los equilibrios encontrados en la pregunta 1 la utilidad social definida por $U_T(x_1, x_2) = U_1(x_1, x_c) + U_2(x_2, x_c)$? Justifique su respuesta.

9. Dos ejércitos se enfrentan en una guerra. El Ejército 1 tiene 4 divisiones, mientras que el Ejército 2 tiene 3. La guerra se decide en dos campos de batalla, de manera que cada ejército debe decidir cuántas divisiones colocar en cada uno de los dos campos. En cada campo de batalla gana el ejército que haya colocado más divisiones y gana la guerra quien gane en más campos de batalla. En caso de haber puesto el mismo número no gana ninguno. Considere que las decisiones son simultáneas y que ganar la guerra da un pago de 1, que perderla da un pago de -1 y que si no se gana ni se pierde el pago es 0. No hay más beneficios ni costes.

(a) Cuáles son las estrategias de cada ejército. (Señálelas como pares de números, donde el primero indica las divisiones asignadas al primer campo y el segundo número, las asignadas al segundo campo).
(b) Describa el juego en forma normal.
(c) Elimine iterativamente las estrategias débilmente dominadas.
(d) Calcule el equilibrio en el juego obtenido en el punto (c).

10. El tesorero de un partido político, Luis Barrenas, tiene que blanquear un millón de euros, fruto de sus actividades delictivas. Puede hacerlo a través de un paraíso fiscal y una empresa fantasma o a través de diversos testaferros. La primera opción le cuesta un cuarto de millón, mientras que la segunda le cuesta medio millón. La Agencia Tributaria, solo tiene recursos para inspeccionar una de las dos posibilidades. Si inspecciona la que no se ha usado, Luis Barrenas se quedará con sus beneficios netos y la Agencia Tributaria no recaudará nada. Si inspecciona la vía que sí ha usado Luis Barrenas, la Agencia Tributaria le embargará todo el dinero que le ha quedado y además le impondrá una multa de medio millón de euros.

(a) Represente el juego en forma normal.
(b) Calcule los equilibrios de Nash.

11. Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias mixtas en el juego del Ejercicio 8.

12. Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias mixtas en el juego del Ejercicio 10.

13. Encuentre el equilibrio en estrategias mixtas del siguiente juego en forma normal:

	L	R
T	2,1	0,2
B	1,2	3,0

14. Considere el juego *Piedra, papel, tijeras* del Ejercicio 3.

(a) Suponga que el Jugador 1 juega *piedra* y *papel* con probabilidades ½ y ½. ¿Cuál es la mejor respuesta del Jugador 2?
(b) ¿Cuál es equilibrio de Nash del juego?

15. Considere el juego entre Nadal y Federer de la Figura 2.5a y añadamos una tercera estrategia para Federer, que ahora puede también restar desde el centro. Nadal, en cambio, continúa con sus dos estrategias. Si Federer usa esta nueva estrategia gana el punto un 30 % de las veces si Nadal saca hacia la izquierda y un 35 % de las veces si saca desde la derecha.

(a) Represente la forma normal del nuevo juego.
(b) Muestre si la nueva estrategia *Centro* de Federer está dominada por alguna estrategia pura o mixta.

16. Dos empresas (1 y 2) compiten *a la* Cournot en un mercado con demanda dada por $p = 130 - q$. No tienen costes fijos. Encuentre los equilibrios de Nash, así como también el precio y los beneficios del equilibrio, en los siguientes casos:

(a) Los costes variables son $c_i(q_i) = 10$.
(b) Los costes variables son $c_1(q_1) = 10$, $c_2(q_2) = 25$.

17. Tres empresas (1, 2 y 3) compiten *a la* Cournot en un mercado con demanda dada por $p = 130 - q$. Todas tienen los mismos costes variables $c_i(q_i) = 10$. Encuentre los equilibrios de Nash, así como también el precio y los beneficios del equilibrio, en los siguientes casos:

(a) No hay costes fijos.
(b) Cada empresa tiene un coste fijo de 1000.

18. Cuatro empresas (1, 2, 3 y 4) compiten *a la* Cournot en un mercado con demanda dada por $p = 130 - q$. Todas tienen los mismos costes variables $c_i(q_i) = 10$. Las empresas 3 y 4 están considerando fusionarse, tras lo cual serían la Empresa X. Muestre si esta fusión les interesa a las empresas 3 y 4 en los siguientes casos:

(a) Ninguna empresa tiene costes fijos.
(b) Cada empresa tiene un coste fijo de 400. Nota: en caso de fusionarse, los costes fijos de la nueva Empresa X serían también 400.

19. En un mercado hay dos empresas que venden dos productos ligeramente diferenciados. Las respectivas funciones de demanda vienen dadas por $q_1 = 1000 - 2p_1 + p_2$ y $q_2 = 1000 - 2p_2 + p_1$. Ambas empresas tienen la misma tecnología con costes variables nulos y sin costes fijos. Encuentre los equilibrios de Nash de este juego en los siguientes casos:

(a) Las empresas compiten *a la* Bertrand.
(b) Las empresas compiten *a la* Cournot.

20. Dos vecinos se están planteando limpiar su calle el domingo por la mañana. Cada uno de ellos dispone solo de una hora que puede utilizar para ver TV o para limpiar la calle. Si llamamos c_i a la cantidad de tiempo que dedica el Vecino *i* a limpiar la calle, entonces el Vecino *i* pasa $1 - c_i$ horas viendo televisión. A cada vecino le importa que la calle esté limpia y le gusta también la TV. En particular sus funciones de utilidad son:

$$U_1(c_1, c_2) = 2\ln\left(1 + c_1 + \frac{c_2}{2}\right) + 1 - c_1$$
$$U_2(c_1, c_2) = 2\ln\left(1 + \frac{c_1}{2} + c_2\right) + 1 - c_2$$

donde $2\ln\left(1 + c_i + \frac{c_j}{2}\right)$ representa la utilidad para el Vecino i de vivir en una calle limpia y $1 - c_i$ la utilidad de ver TV para el Vecino i.

(a) Calcule los equilibrios de Nash.
(b) Represente gráficamente las funciones de mejor respuesta y los equilibrios de Nash.

Otros ejercicios

21. Consideremos dos empresas, una que ya está operando en el mercado (Empresa 1) y otra que quiere entrar (Empresa 2). La que ya está se plantea construir una nueva planta. Los pagos se indican a continuación.

	Entrar	No entrar
Construir	0, -1	2, 0
No construir	2, 1	3, 0

Interprete los pagos y calcule los equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas.

22. Carlos (C) y Pepe (P) quieren dividirse diez euros. Simultáneamente cada uno anuncia la cantidad que quiere quedarse, expresada en céntimos y sin decimales, s_i, $(i = C, P)$, siendo $0 \leq s_i \leq 1000$. Si $s_C + s_P \leq 1000$, cada uno recibe lo que ha pedido. En caso contrario, ninguno recibe nada. ¿Cuáles son los equilibrios de Nash en estrategias puras de este juego?

23. Suponga que seis hermanos necesitan decidir quién de ellos se lleva el coche el fin de semana y que acuerdan hacerlo de la siguiente manera. Todos escriben al mismo tiempo un número entre 0 y 10. Después calculan la media de los números escritos y aquél que haya escrito el número menor que la media más próximo a la misma se lleva el coche. En caso de empate, su padre decide quién se lleva el coche de forma aleatoria y equiprobable entre los que han empatado. Indique, explicando qué procedimiento ha seguido para encontrarlos, cuáles son los equilibrios de Nash de este juego.

24. Suponga que en el paseo marítimo de una playa hay dos vendedores de helados. Los dos venden helados Frigo y no tienen posibilidad de diferenciarse en cuanto al precio de venta de estos productos. Su única decisión consiste en determinar dónde se van a colocar. Los consumidores están repartidos uniformemente por toda la playa y se dirigirán al puesto más cercano. Los vendedores deben decidir su localización para maximizar el número de clientes. La localización socialmente óptima es la que reduce al máximo la distancia total recorrida por el conjunto de los consumidores.

(a) Razone por qué los heladeros no tendrán incentivos para mantener esta localización (la clave es pensar por qué estas estrategias de localización no constituyen un equilibrio de Nash). ¿En qué sentido tenderán a moverse? ¿Dónde se situarán finalmente?
(b) ¿Cambiaría su respuesta si los bañistas tendieran a consumir menos helados si aumenta la distancia que tienen que recorrer hasta el puesto más cercano?
(c) Supongamos ahora que el número de vendedores de helados pasa de 2 a 3. Muestre que no existe equilibrio en estrategias puras.

25. Dos jugadores escriben, simultáneamente, un número entre 0 y 1. Sea si el número escrito por el Jugador i. Los pagos para cada jugador dependen de la diferencia entre ambos números según la función:

$$u_1(s_1, s_2) = u_2(s_1, s_2) = (s_1 - s_2)^2$$

(a) Indique cuál es la mejor respuesta del Jugador 2 a las siguientes estrategias: $s_1 = 1$, $s_1 = 0$ y $s_1 = \frac{1}{2}$.
(b) Represente gráficamente la función mejor respuesta de cada jugador.
(c) Halle los equilibrios de Nash en estrategias puras.

26. Dos amigos comparten un apartamento. Tienen que decidir cómo dividir un total de 8 horas entre limpiar $(s_i, i = 1{,}2)$ y ver televisión $(8 - s_i, i = 1{,}2)$. A cada uno le importa que el apartamento esté limpio, pero también disfrutan viendo televisión. En particular, suponga que la función de utilidad para el Jugador i es la siguiente:

$$u_i(s_1, s_2) = (s_1 + s_2) + (8 - s_i) + (8 - s_i)(s_1 + s_2)$$

donde el primer término es la utilidad procedente de tener un apartamento limpio, el segundo es la utilidad directa derivada de ver la televisión y el último término refleja el hecho de que la utilidad de ver la televisión aumenta con la limpieza del apartamento.

(a) Halle los equilibrios de Nash del juego.
(b) Los equilibrios de Nash hallados, ¿maximizan el bienestar conjunto de los dos amigos definido por $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2)$?

27. Dos municipios pertenecientes a dos Comunidades Autónomas distintas compiten entre sí ofreciendo concesiones fiscales que ayuden a fomentar su desarrollo industrial. Si las dos ofrecen simultáneamente las mismas concesiones, la recaudación impositiva desciende sin que ello garantice el establecimiento de las empresas. En este caso preferirían haber recaudado más. Sin embargo, lo ideal sería atraer a estas empresas, aunque ello conllevara algún coste fiscal. Represente esta situación como un juego, poniendo un ejemplo numérico y explicando los factores estratégicos relevantes.

28. Pedro y Miguel viven en casas contiguas. Desde su terraza Pedro no puede ver su propio jardín, pero tiene una magnífica vista del jardín de Miguel. Así, Pedro valora en dos mil euros que el jardín de Miguel esté mantenido, pero solo en 500 euros que su propio jardín lo esté. La situación y preferencias de Miguel son completamente recíprocas. Puesto que los jardines son visibles desde la vía pública, el ayuntamiento subvenciona (por importe de 500 euros) a cada vecino de las calles en las que todos los jardines estén bien mantenidos. Pedro y Miguel son los únicos vecinos de su calle. El coste de mantenimiento de cada jardín es de mil euros. Represente el juego al que se enfrentan Pedro y Miguel.

29. En una misma zona un ayuntamiento está decidido a construir un instituto de bachillerato o una guardería infantil, pero no tiene presupuesto para llevar a cabo los dos. La persona encargada de gestionar estos asuntos ha hablado con dos empresas indispensables para realizar cualquiera de las dos obras: una de construcción y otra de carpintería. Debido a la composición de la población, el edificio del instituto sería mayor que el de la guardería (requiere más construcción), pero esta precisará de un parque de juegos de madera (requiere más carpintería). Además, a cada una de las empresas le interesa más participar en una obra determinada que en la otra (la de construcción en el instituto, y la de carpintería en la guardería infantil), pero ambas prefieren firmar el mismo contrato que firmar distintos contratos, ya que en este caso el ayuntamiento no llevaría a cabo ningún proyecto. El ayuntamiento les pide que presenten un proyecto. Como ninguna de las empresas tiene suficiente personal disponible para elaborar ambos proyectos, tienen que decidirse por uno u otro, sin saber qué es lo que va a hacer la otra.

(a) Defina un juego en forma normal cuyos pagos reflejen los beneficios esperados por cada empresa en cada posible situación.
(b) Calcule los equilibrios de Nash.

30. Considere el siguiente juego en forma normal:

	B_1	B_2	B_3
A_1	1,1	0,0	-1,0
A_2	0,0	0,6	10,-1
A_3	2,0	10,-1	-1,-1

(a) ¿Cuáles estrategias sobreviven a la eliminación sucesiva de estrategias dominadas?
(b) ¿Cuáles son los equilibrios de Nash?

31. Dos amigos, Andrea y Bernardo, se plantean repartirse 101 euros, para lo que acuerdan el siguiente procedimiento. Cada uno escribe (sin conocer lo que escribe el otro) un número en una hoja de papel y se reparten el dinero según las reglas que se describen a continuación:

i. Si ambos números son pares, Andrea se queda 51 euros y Bernardo 50.
ii. Si ambos números son impares, Andrea se queda 50 euros y Bernardo 51.
iii. En el resto de los casos, ambos se quedan 50 euros, renunciando al euro de la discordia.

(a) Represente el juego anterior (Juego A) en forma normal.
(b) Halle los equilibrios de Nash en estrategias puras.

Bernardo está especialmente interesado en una solución igualitaria, pero no le complace la que se obtendría del juego anterior. Así pues, propone aumentar las opciones de cada jugador introduciendo la acción *No escribir ningún número* (llamemos Juego B a este juego ampliado). En este caso, si uno de ellos escribe un número y el otro no, aquel que no escriba ningún número se queda todo el dinero, dejando al otro sin nada. Por otro lado, si ambos eligen la estrategia *No escribir ningún número*, cada uno de ellos recibe solo 1 euro, renunciando ambos al dinero sobrante.

(c) Halle los equilibrios de Nash, tanto en estrategias puras como en mixtas, del juego ampliado (Juego B).

32. En el siguiente juego en forma normal

	B_1	B_2	B_3
A_1	2, 0	1, 1	4, 2
A_2	3, 4	1, 2	2, 3
A_3	1, 3	0, 2	3, 0

(a) ¿Cuáles estrategias sobreviven la eliminación sucesiva de estrategias dominadas?
(b) ¿Cuál es el equilibrio de Nash?

33. En una pequeña isla hay solamente dos consumidores y dos empresas importadoras de coches, una que importa coches americanos y otra que importa coches europeos. Recientemente, los dos únicos consumidores se han quedado sin coche a la vez. Como en la isla no hay transporte público, ambos van a comprar exactamente un coche, sea cual sea el precio al que lo encuentren. No obstante, tampoco quieren pagar más de lo necesario, por lo que van a comprar el coche a la empresa que lo ofrezca más barato y, en caso de que lo ofrezcan las dos al mismo precio, cada uno irá a una empresa distinta.

Por cada coche que las empresas vendan deberán pagar el coste de importación, que es de 10 000 para la empresa que importa coches americanos, y de 8000 para la que importa coches europeos. Dado que la moneda más pequeña que circula en la isla es de una unidad monetaria no se pueden fijar precios con decimales. El principal objetivo de las empresas es maximizar su beneficio y, a mismos beneficios, prefieren vender los más posible.

(a) Si las dos empresas tienen que elegir sus precios simultáneamente, escriba sus funciones de pagos o funciones de beneficios.
(b) Si el precio que pone la empresa americana $p_A = 10\ 000$, ¿cuál es la mejor respuesta de la empresa europea? ¿y si $p_A = 5000$?

Nota: en caso de indiferencia entre varios precios y si uno de ellos es igual al coste de importación supondremos que este es el que eligen las dos empresas.

(c) Si el precio que pone la empresa europea $p_E = 15\ 000$, ¿cuál es la mejor respuesta de la empresa americana? ¿y si $p_E = 1000$?
(d) Calcule las funciones de reacción de cada empresa para todo precio de su rival. Calcula el único equilibrio de Nash de este juego en estrategias puras. ¿Cuántos coches venderá cada empresa y a qué precio?

Ahora supongamos que el gobierno de la isla está preocupado por el precio de los coches y está dispuesto a subvencionar 1000 del coste de una y solo una de las dos empresas importadoras por cada coche que venda.

(e) ¿A qué empresa ofrecerá la subvención si el objetivo del gobierno es que los consumidores compren sus coches lo más barato posible?
(f) ¿Quién venderá ahora los dos coches, y a qué precio? ¿Cuánto dinero le costará al gobierno la subvención?