I	II.1	II.2	II.3	II.4	Total

Teoría de Juegos
Examen diciembre 2019

Nombre: **Grupo:**

Tiene dos horas y media para completar el examen. No se puede usar calculadora ni ningún otro aparato electrónico.

I Preguntas cortas (5 puntos cada una)

I.1 Considere el siguiente juego:

		Jugador 2	
		C	D
Jugador 1	C	1, 1	0, 0
	D	x, x	2, 1

Encuentre los equilibrios de Nash cuando $0 < x < 1$.

I.2 El único equilibrio de Nash en un juego de dos jugadores y dos estrategias para cada jugador es un equilibrio en estrategias mixtas donde ambos jugadores juegan cada una de sus estrategias con probabilidad positiva. ¿Puede algún jugador tener estrategias estrictamente dominadas?

I.3 Ponga un ejemplo de juego dinámico con información perfecta en el que el equilibrio perfecto de Nash en subjuegos no sea óptimo de Pareto.

I.4 Dos empresas compiten *a la* Cournot en un mercado con demanda $p = 9 - q$. El coste marginal de ambas empresas es cero, pero la empresa 2 tiene un coste fijo F si decide producir. ¿A partir de qué valor de F decidirá no producir?

I.1 EN en estrategias puras: (C, C), (D, D).
En estrategias mixtas: para el Jugador 1 $q = xq + 2(1 - q)$ implica $q = \frac{2}{3-x}$. Para el Jugador 2 $p + x(1 - p) = 1 - p$ implica $p = \frac{1-x}{2-x}$.
El EN en estrategias mixtas es: $\left(\left(\frac{1-x}{2-x}[C], \frac{1}{2-x}[D]\right), \left(\frac{2}{3-x}[C], \frac{1-x}{3-x}[D]\right)\right)$.

I.2 No. En caso contrario ese jugador estaría jugando una estrategia dominada con probabilidad positiva y vería incrementada su utilidad jugando esa estrategia con probabilidad cero.

I.3 El modelo de oligopolio de Stackelberg.

I.4 Las condiciones de primer orden para una solución interior del equilibrio de Cournot dan $q_1 = q_2 = \frac{9}{3} = 3$, con $p = 3$. Los beneficios de la Empresa 2 serían $\Pi_2 = 9 - F$. Así, la Empresa 2 solo producirá si $F \leq 9$.

II. Problemas (20 puntos cada uno)

II.1 Suponga que hay 2 empresas en un mercado que ofrecen productos diferenciados con demandas según las funciones $q_1 = 100 - 2p_1 + p_2$ y $q_2 = 100 - 2p_2 + p_1$, respectivamente. La variable estratégica es el precio. Suponga que ambas empresas tienen un coste marginal igual a 50 €.

(a) (2 puntos) Describa el conjunto de jugadores, los conjuntos de estrategias y las funciones de beneficios.

(b) (5 puntos) Calcule y dibuje las funciones mejor respuesta para ambas empresas.

(c) (5 puntos) Encuentre los equilibrios Nash y señálelos con un círculo en el gráfico anterior. Calcule los beneficios de las empresas en los equilibrios de Nash.

(d) (5 puntos) Suponga ahora que los productos no están diferenciados y que las empresas compiten *a la* Bertrand en un mercado con demanda $q = 100 - p$. ¿Cuáles son los equilibrios de Nash?

(e) (3 puntos) Continúe asumiendo la competencia *a la* Bertrand en (d), argumente qué cambiaría en el equilibrio en cada una de las siguientes situaciones (no es necesario hacer nuevos cálculos, pero puede realizarlos si así lo desea):

   i. El coste marginal de la empresa 1 sigue siendo de 50 €, pero el de la empresa 2 pasa a ser 30 €.

   ii. Una tercera empresa entra en el mercado con igual coste marginal de 50 €.

(a) $N = \{\text{Empresa 1, Empresa 2}\}$.
$S_i = \{p \in [0, \infty)$.
$\Pi_i = (p_i - 50)(100 - 2p_i + p_j)$.

(b) $MR_i(p_j) = \frac{200+p_j}{4}$.

(c) $EN = \left(\frac{200}{3}, \frac{200}{3}\right)$. $\Pi_i = 555.28$.

(d) Ambas empresas pondrán un precio de 50 € y tendrán beneficios nulos.

(e) (i) La Empresa 2 pondrá un precio de $p = 50 - \varepsilon$ para atraer toda la demanda, dado que la Empresa 1 no podrá poner un precio por debajo de 50 € sin entrar en pérdidas.

(ii) No cambia nada.

II.2 Dos gerentes de un colegio mayor, la encargada de la casa y la de la cocina, deben elegir un asistente de entre un conjunto de candidatos, $\{a, b, c\}$. La encargada de la casa prefiere *a* frente a *b*, y *b* frente a c. La encargada de la cocina prefiere *b* antes que *a*, y *a* antes que *c*. El procedimiento de elección es el siguiente: Primero, la encargada de la casa veta a un candidato. Segundo, la encargada de la cocina veta a uno de los dos candidatos que quedan. El candidato elegido es el que no es vetado por ninguna de las dos.

(a) (5 puntos) Modele esta situación como un juego en forma extensiva. ¿Cuántos subjuegos hay? ¿Cuántos conjuntos de información tiene cada jugadora? ¿Cuántas estrategias tiene cada jugadora?
(b) (5 puntos) Encuentre los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos.
(c) (5 puntos) ¿Hay algún equilibrio de Nash que no sea equilibrio de Nash perfecto en subjuegos? En caso afirmativo, muestre un ejemplo. En caso negativo, argumente por qué no.
(d) (5 puntos) Asuma ahora que a la encargada de la cocina se le da la posibilidad de elegir si ser la primera o la segunda en vetar. ¿Qué elegirá?

(a) $S_H = \{a, b, c\}$, $S_K = \{baa, bab, bca, bcb, caa, cab, cca, ccb\}$
La encargada de la casa tiene tres estrategias, la encargada de la cocina tiene 8.
El juego tiene cuatro subjuegos. La encargada de la casa tiene un conjunto de información. La encargada de la cocina tiene tres conjuntos de información.

(b) El único *ENPS* es $\{b, cca\}$.

(c) Sí. Por ejemplo, $\{b, bcb\}$ es un equilibrio de Nash. Obsérvese que no hay desviaciones unilaterales provechosas para ninguno de los dos jugadores.

(d) La encargada de la cocina preferiría ser la primera en jugar. Su pago en el nuevo equilibrio ($\{a, ccb\}$) sería 2, mientras que el pago en el equilibrio del juego original en (a) es 1.

II.3 Considere el siguiente juego en forma normal:

		Jugadora 2	
		P	H
Jugadora 1	X	12, 12	6, 6
	Y	16, 6	8, 8

(a) (5 puntos) Si el juego se juega 4 veces, ¿cuáles son los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos?
(b) (5 puntos) Si el juego se repite infinitas veces, defina la estrategia gatillo que sostiene los pagos (12,12) en cada periodo. Encuentre los factores de descuento para que la estrategia sea un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.
(c) (6 puntos) Muestre que las estrategias encontradas en (b) son, efectivamente, un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.
(d) (4 puntos) Repita el apartado (b) añadiendo una probabilidad p en cada periodo de que el juego continúe un periodo más.

(a) Jugar (Y, H) de manera incondicional en todos los periodos.

(b) Estrategia gatillo:

En $t = 1$ jugar (X, P).
En $t > 1$ jugar (X, P) si se ha jugado (X, P) en todo periodo $t' < t$,
jugar (Y, H) en otro caso.

$u_1(\textit{Estrategia gatillo}, \text{Estrategia gatillo}) = \frac{12}{1-\delta}$,
$u_1(\text{Desv. en el primer periodo, Estrategia gatillo}) = 16 + \frac{8\delta}{1-\delta}$.
$\frac{12}{1-\delta} \geq 16 + \frac{8\delta}{1-\delta}$ if $\delta \geq 0{,}5$.

(c) Mostremos que la estrategia gatillo es un equilibrio de Nash:
Tras los cálculos en (b) es suficiente mostrar que la mejor desviación es la desviación en el primer periodo:
-Una desviación en cualquier otro periodo da unas condiciones exactamente iguales a una desviación en el primer periodo con los pagos calculados al principio de ese periodo.
-Una desviación en más de un periodo otorga al jugador que se desvía un pago de 6 en lugar de 8 en cualquier periodo en que se desvíe distinto de la primera desviación, y el mismo pago de 8 en los periodos en que no se desvía. Por lo tanto, será peor que una desviación en un periodo único.

Mostremos que jugar la estrategia gatillo es un equilibrio de Nash en los subjuegos tras una historia en la que se ha jugado (X, P) en todos los periodos anteriores:
-El subuego es idéntico al juego original y la estrategia gatillo requiere jugar de manera idéntica que en el juego original. Por tanto, el argumento anterior es válido para estos subjuegos.

Mostremos que jugar la estrategia gatillo es un equilibrio de Nash en cualquier otro subjuego:
-La estrategia gatillo requiere jugar (Y, H) en todos los periodos, i.e., jugar de manera incondicional el EN en todos los periodos. Por tanto, será un EN en esos subjuegos.

(d) Como antes, con $u_1(\textit{Estrategia gatillo}, \text{Estrategia gatillo}) = 12 + 12\delta p + \cdots = \frac{12}{1-\delta p}$,
$u_1(\text{Desv. en el primer periodo, Estrategia gatillo}) = 16 + \frac{8\delta p}{1-\delta p}$. La nueva condición será $\delta p \geq 0{,}5$.

II.4 A la prestigiosa subasta que se celebra en Londres, acuden Eduardo y Judith para pujar por una colección de joyas de arte romano. Ambos serán los únicos en realizar las pujas. Se sabe que Judith está considerando pujar 5.000 o 10.000 euros, mientras que Eduardo está considerando pujar 5.000 u 11.000. La subasta es a sobre cerrado y al primer precio. El jugador que realice la puja más alta obtendrá la colección, pero en caso de empate el ganador se decidirá a cara y cruz. Ambos jugadores saben que Eduardo valora la colección de joyas en 15.000 euros, pero solo Judith sabe su verdadera valoración de la colección, que es 7.000 euros con probabilidad p, siendo $0 < p < 1$ o de 12.000 euros con probabilidad $1 - p$.

(a) (4 puntos) Represente el juego bayesiano, señalando todos sus elementos.
(b) (5 puntos) Encuentre todos los equilibrios de Nash bayesianos en estrategias puras no débilmente dominadas para todos los valores de p.
(c) (8 puntos) Repita los apartados anteriores para el caso de una subasta al segundo precio.
(d) (3 puntos) Compare los equilibrios de ambos juegos (estrategias, utilidades de los jugadores e ingresos del subastador).

(a) Jugadores: {Eduardo, Judith}
Tipos de Eduardo: {E15}
Tipos de Judith: {J7, J12}
Creencias: $p(\text{E15}|\text{J7}) = 1$,
$p(\text{E15}|\text{J12}) = 1$,
$p(\text{J7}|\text{E15}) = p$, $p(\text{J12}|\text{E15}) = 1 - p$.
Estrategias de Eduardo: {5, 11}. Estrategias de Judith: {(5, 5), (5, 10), (10, 5), (10, 10)}.
Utilidades:

p		Judith 7: 5	Judith 7: 10
Eduardo	5	5, 1	0, -3
	11	4, 0	4, 0

1-p		Judith 12: 5	Judith 12: 10
	5	5, 3.5	0, 2
	11	4, 0	4, 0

(b) Para J7 y J12 la acción 10 está débilmente dominada. No hay otras estrategias débilmente dominadas.
Tras eliminar 10 para J7 y 10 para J12, Eduardo prefiere jugar 5 para cualquier valor de p. El ENPS es (5, (5, 5)) para todo p.

(c) Igual que antes, excepto que las utilidades pasan a ser:

p		Judith 7: 5	Judith 7: 10
Eduardo	5	5, 1	0, 2
	11	10, 0	5, 0

1-p		Judith 12: 5	Judith 12: 10
	5	5, 3.5	0, 7
	11	10, 0	5, 0

Para J7 y J12 la acción 5 está débilmente dominada. Para Eduardo 5 está dominada. El ENPS es (11, (10, 10)) para todo p.

(d) Los jugadores pujan más en la subasta al segundo precio. Las utilidades son 5, 1, 3.5 para E15, J7 y J12, respectivamente en (b) y 5, 0, 0 en (c). Eduardo obtiene la misma utilidad en ambos casos, pero Judith está peor en el segundo. La colección se vende al precio de 10 en (c), un precio mayor que 5, el precio en (b).