Teoría de los Juegos
Examen Final
17 de enero de 2012

Nombre:
Grupo:
INSTRUCCIONES:
Tiene 2 horas y 45 minutos para realizar este examen. Escriba en el espacio a continuación del enunciado. Puede usar la parte de detrás de la hoja.

1. (30 puntos) El General A defiende su territorio contra los ataques del General B. El territorio del General A es accesible por dos puertos de montaña. El General A tiene 4 regimientos a su disposición y el B, 3. Cada general reparte sus regimientos entre los dos puertos (deben usarlos todos). Si ambos generales envían el mismo número de regimientos al puerto 1, ninguno obtiene ventaja y sus pagos son cero. Si un general envía más regimientos que el otro al puerto 1, el pago se calcula de la siguiente manera: si x es el número de regimientos del que más envía, ese general obtiene un pago de x y el otro de $-x$. Las ganancias del puerto 2 están calculadas análogamente. El pago total de cada general es la suma de las ganancias en los puertos 1 y 2. Por razones de intendencia los regimientos deben enviarse enteros. Los generales eligen su estrategia simultáneamente.

(a) ¿Cuáles son las estrategias de cada general si el General A tiene que asignar al menos un regimiento a cada puerto y el General B es libre de repartirlos de cualquier manera? (5 puntos)
(b) Represente el juego en forma normal. (5 puntos)
(c) ¿Cuáles son las estrategias que sobreviven a la eliminación sucesiva de estrategias estrictamente dominadas? (5 puntos)
(d) Encuentre todos los equilibrios de Nash. (15 puntos)

(a) Estrategias del General A: {(1,3), (2,2), (3,1)}, del B: {(0,3), (1,2), (2,1), (3,0)}.
(b)

A/B	**0,3**	**1,2**	**2,1**	**3,0**
1,3	1+0, -1+0	0+3, 0-3	-2+3, 2-3	-3+3, 3-3
2,2	2-3, -2+3	2+0, -2+0	0+2, 0-2	-3+2, 3-2
3,1	3-3, -3+3	3-2, -3+2	3+0, -3+0	0+1, 0-1

A/B	**0,3**	**1,2**	**2,1**	**3,0**
1,3	1, -1	3, -3	1, -1	0, 0
2,2	-1, 1	2, -2	2, -2	-1, 1
3,1	0, 0	1, -1	3, -3	1, -1

(c) Para el General B la estrategia (1,2) está estrictamente dominada por (0,3) y la estrategia (2,1) está estrictamente dominada por (3,0). Eliminando estas estrategias, (2,2) está estrictamente dominada por (1, 3) y (3, 1) para general A. Nos queda

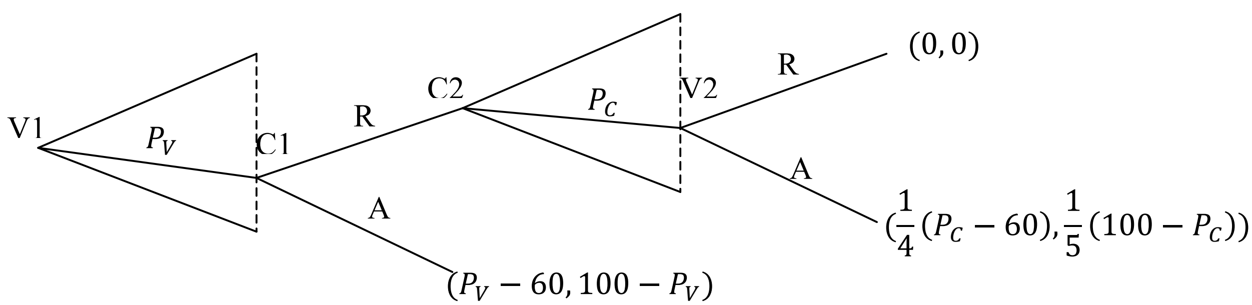
A/B	**0,3**	**3,0**
1,3	1, -1	0, 0
3,1	0, 0	1, -1

(d) No hay equilibrios de Nash en puras (3 puntos). El único equilibrio ENEM es p =q = 1/2. (Plantear el problema de encontrar el equilibrio en mixtas: 6 puntos, resolver: 6 puntos)

2. (30 puntos) Un vendedor puede producir, a un coste de 60 euros, un bien que un comprador valora en 100 euros. Entre ambos negociarán el precio de venta en un juego de negociación de dos etapas. En la primera el vendedor propone un precio que, de ser aceptado, implica la venta a ese precio y el final del juego. Si la propuesta es rechazada será el turno del comprador para proponer un precio. Si es aceptada por el vendedor se venderá el bien a ese precio y el juego terminará. Si se rechaza no hay más propuestas ni posibilidad de compraventa. Sea *p* el precio al que se ha vendido el bien, la utilidad del vendedor será $p - 60$ y la del comprador $100 - p$. En caso de que no haya acuerdo la utilidad es cero para ambos. La tasa de descuento del vendedor es $\delta_V = 1/4$ y la del comprador $\delta_C = 1/5$. Asumiremos que, en caso de indiferencia, los jugadores aceptan la propuesta.

(a) Representa el juego en forma extensiva indicando los conjuntos de información de cada jugador, así como sus acciones en cada uno de esos conjuntos. (10 puntos)
(b) Encuentra el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. (15 puntos)
(c) ¿Qué acuerdo se alcanza, con qué pagos y en qué periodo? (5 puntos)

(a) Forma extensiva:



(Representación del árbol detallando acciones: 4 puntos)
(Pagos en nudos finales: 3 puntos)
(Descripción de los conjuntos de información: 3 puntos)

(b) V2 acepta (A) si $p_c - 60 \geq 0$, rechaza en caso contrario. (5 puntos)
C2 ofrece $p_C = 60$. (2 puntos)
C1 acepta (A) si $100 - P_V \geq \frac{1}{5}(100 - 60)$, es decir, si $p_V \leq 92$. (6 puntos)
V1 ofrece $p_V = 92$. (2 puntos)

(c) El acuerdo se alcanza en el primer turno de la negociación (1 punto). El vendedor ofrece $p_V = 92$ y el comprador acepta (1 punto). Los pagos son $(92 - 60, 100 - 92) = (32, 8)$ (3 puntos).

3. (20 puntos) El imperio Romano y el Imperio Parto juegan en cada período el siguiente juego donde *P* significa ser pacífico y *A* significa hacer una incursión en la frontera del otro imperio. Los emperadores suponen que los dos imperios durarán para siempre. Calcule la tasa de descuento para pueda existir un equilibrio perfecto en subjuegos en el que ambos sean pacíficos siempre como resultado del equilibrio.

		Imperio Parto	
		P	A
Imperio Romano	P	1,1	-1,3
	A	3,-1	0,0

Usemos la estrategia "resorte" donde cada Imperio (Romano o Parto) juega de la siguiente manera:

En t=1 juega P, en t>1 juega P si en todos los periodos anteriores se ha jugado (P,P), juega A en caso contrario. (5 puntos)

La mejor desviación es jugar A en t=1 y, después, jugar siempre A, puesto que no hay ganancias en los subjuegos después de no haber jugado (P,P) ya que la estrategia dicta un EN en esos casos. (5 puntos)

Solo falta ver que sea EN en el juego entero (y en juegos tras haber jugado siempre (P,P)):

Si se sigue la estrategia se obtiene $u_I = 1 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots = \frac{1}{1-\delta}$.

La desviación da la utilidad $u_I = 3 + 0 + 0 + \cdots = 3$.

(5 puntos)

Para que no merezca la pena debe ocurrir que $\frac{1}{1-\delta} \geq 3$, es decir $\delta \geq \frac{2}{3}$. (5 puntos)

4. (20 puntos) Considere un duopolio de Cournot que opera en un mercado con la función inversa de demanda $p(q) = A - q$, donde $q = q_1 + q_2$ es la cantidad agregada en el mercado. Por simplicidad, supongamos que las empresas tienen unos costes de producción nulos. El parámetro de la función de demanda, A, puede tomar los valores 10 (demanda baja) o 20 (demanda alta) con iguales probabilidades. Antes de tomar su decisión sobre cuánto producir, la Empresa 1 tiene información veraz sobre el valor de A. La Empresa 2, en cambio, no tiene acceso a esta información. Las empresas deciden qué cantidad producir de manera independiente y simultánea. La Empresa 1 sabe que la Empresa 2 no tiene acceso a la información y la Empresa 2 sabe que la Empresa 1 sí tiene acceso. Todo esto es de conocimiento común.

(a) Represente esta situación como un juego bayesiano. Es decir, indique el conjunto de jugadores, el conjunto de tipos de cada jugador, las creencias sobre los tipos de los demás y las estrategias de cada tipo. Indique también las funciones de utilidad (de beneficios) de las empresas en función de las estrategias. (5 puntos)

(b) Calcule el equilibrio de Nash bayesiano del juego anterior. Calcule también los beneficios en el equilibrio. (15 puntos)

(a) Jugadores: $\{1,2\}$
Tipos de 1: $\{1A, 1B\}$, tipos de 2: $\{2\}$ (jugadores y tipos: 1 punto)
Creencias de 1A: $p_{1.A}(2) = 1$,
creencias de 1B: $p_{1.B}(2) = 1$,
creencias de 2: $p_2(1.A) = \frac{1}{2}$, $p_2(1.B) = \frac{1}{2}$. (creencias: 1 punto)
Estrategias del tipo t: $q_t \in [0, \infty)$. (estrategias: 1 punto)
Beneficios: $\Pi_{1.A} = (20 - q_{1.A} - q_2)q_{1.A}$, $\Pi_{1.B} = (10 - q_{1.B} - q_2)q_{1.B}$,
$\Pi_2 = \frac{1}{2}(20 - q_{1.A} - q_2)q_2 + \frac{1}{2}(10 - q_{1.B} - q_2)q_2$. (2 puntos)

(b) 1.A resuelve $max_{q_{1.A}}\,(20 - q_{1.A} - q_2)q_{1.A}$, cuya condición de primer orden (CPO) es $q_{1.A} = \frac{20-q_2}{2}$. (3 puntos)

1.B resuelve $max_{q_{1.B}}\,(10 - q_{1.B} - q_2)q_{1.B}$, cuya CPO es
$q_{1.B} = \frac{10-q_2}{2}$. (3 puntos)

2 resuelve $max_{q_2}\,\frac{1}{2}(20 - q_{1.A} - q_2)q_2 + \frac{1}{2}(10 - q_{1.B} - q_2)q_2$, cuya CPO es
$q_2 = \frac{30-q_{1.A}-q_{1.B}}{4}$. (4 puntos)

Resolviendo las tres ecuaciones se obtiene el EN: $(q_{1.A}, q_{1.B}, q_2) = (7{,}5,\ 2{,}5,\ 5)$. (3 puntos)

Los beneficios en el EN son $(\Pi_{1.A}, \Pi_{1.B}, \Pi_2) = (56{,}25,\ 6{,}25,\ 25)$. (2 puntos)