Teoría de Juegos
Examen de enero de 2017

Nombre: **Grupo:**

Tiene dos horas y media para completar el examen.

I. Preguntas cortas (5 puntos cada una)

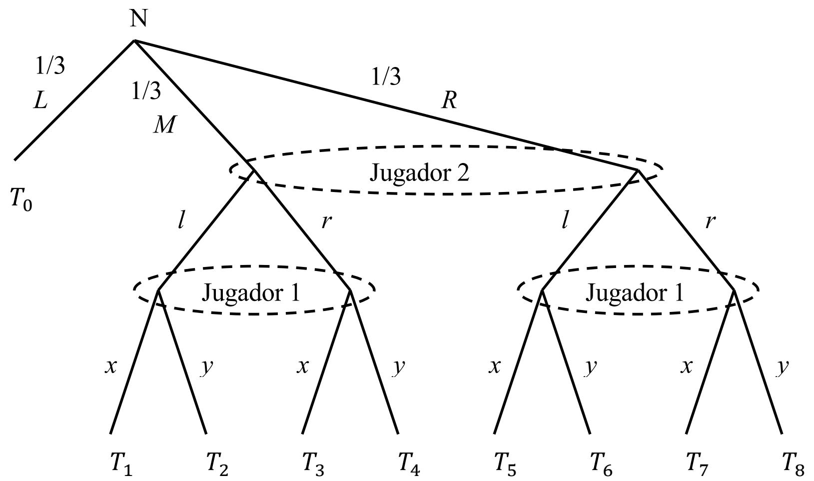
I.1 Dé un ejemplo de un juego estático en el que la eliminación de estrategias débilmente dominadas elimina algún equilibrio de Nash.

1, 1	0, 0
0, 0	0, 0

I.2 Dos jugadoras participan en una subasta en sobre cerrado al primer precio. En caso de pujar la misma cantidad se llevarán el bien con probabilidad ½. Las valoraciones de las jugadoras son 10 y 11, respectivamente. Solo se permiten pujas que sean números enteros. Encuentre los tres equilibrios de Nash en estrategias puras.

$$\text{EN} = \{(9,9), (9,10), (10,10)\}.$$

I.3 En el siguiente juego, describa los conjuntos de estrategias de los jugadores (el primer vértice corresponde a la naturaleza o azar). ¿Cuántas estrategias tiene cada jugador?



Jugador 1: $S_1 = \{(x,x), (x,y), (y,x), (y,y)\}$. Cuatro en total.
Jugador 2: $S_2 = \{l, r\}$. Dos en total.

I.4 Considere un duopolio de Cournot con información asimétrica en el que la Empresa 2 no sabe si los costes de la Empresa 1 son altos o bajos. Si la Empresa 1 tuviera costes altos, ¿preferiría la situación con información asimétrica a la situación con información simétrica? ¿Y si la Empresa 1 tuviera costes bajos?

Si la Empresa 1 tiene costes altos prefiere que no se sepa (información asimétrica).
Si la Empresa 2 tiene costes bajos prefiere que se sepa (información simétrica).

II. Problemas (20 puntos cada uno)

II.1 Entre las posibles externalidades que afectan a las decisiones económicas y que alejan a estas de la eficiencia, está el que la utilidad dependa no solo del nivel absoluto de consumo, sino también del relativo. Veamos un caso. Pongamos que hay dos consumidores, 1 y 2, con preferencias dadas por $u_i = x_i(16 - l_i)$, donde x_i es la cantidad del bien *x* consumida en un día, y l_i es la cantidad de tiempo dedicado a trabajar ($i = 1{,}2$), medida en horas al día ($16 - l_i$ es el ocio sin contar las horas de sueño). Para mantener el ejemplo sencillo, pongamos que el salario por hora es de 10€ y que el precio de una unidad del bien es también de 10€. Además, no hay posibilidad de ahorrar.

(a) Resuelva el problema de los consumidores. Encuentre la cantidad de horas que dedicarán a trabajar y sus utilidades. (5 puntos).

Añadamos ahora un nuevo término a la función de utilidad que denote las preferencias por el consumo relativo: $u_i = x_i(16 - l_i) + 4(x_i - x_j)$. En esta función, se observa que si el consumo propio es mayor que el del otro consumidor, $x_i > x_j$, la utilidad aumenta, mientras que si $x_i < x_j$ esta disminuye. Con estas nuevas funciones de utilidad conteste a las siguientes preguntas.

(b) Repita las cuestiones del apartado (a). (5 puntos).
(c) Plantee el siguiente juego simultáneo: cada consumidor elige entre la cantidad de horas halladas en (a) y en (b). Encuentre el equilibrio de Nash. ¿Es óptimo? (10 puntos).

(a) El Consumidor *i* resuelve

$$max_{x_i,l_i}\, u_i = x_i(16 - l_i)$$
$$\text{s.a } 10x_i = 10l_i$$

O bien

$$max_{l_i}\, u_i = l_i(16 - l_i),$$

cuya solución es $l_i = 8$. De ahí se hallan $x_i = 8$ y $u_i = 64$.

(b) El nuevo problema es

$$max_{x_i,l_i}\, u_i = x_i(16 - l_i) + 4(x_i - x_j)$$
$$\text{s.a } 10x_i = 10l_i$$

O bien

$$max_{l_i}\, u_i = l_i(16 - l_i) + 4(l_i - x_j)$$

cuya solución es $l_i = 10$. De ahí se hallan $x_i = 10$ y $u_i = 60$.

(c) El juego es

		Empresa 2	
		$l_2 = 8$	$l_2 = 10$
Empresa 1	$l_1 = 8$	64, 64	56, 68
	$l_1 = 10$	68, 56	60, 60

El equilibrio $(l_1 = 10, l_2 = 10)$ no es óptimo: el par de estrategias $(l_1 = 8, l_2 = 8)$ es mejor para ambos.

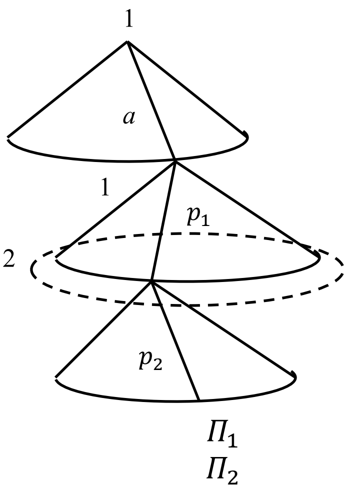
II.2 Dos empresas compiten en un modelo de Bertrand con productos diferenciados. Las demandas de las empresas son:

$$q_1 = 10a - 2p_1 + p_2,$$
$$q_2 = 10a - 2p_2 + p_1,$$

donde $a \geq 0$ es un parámetro que toma valores reales. Por simplicidad, asumimos que los costes de producción de las empresas son 0. En la primera etapa, la Empresa 1 puede lanzar una campaña publicitaria para atraer consumidores al mercado, determinando el valor de *a*. En particular, a la Empresa 1 le cuesta $c(a) = a^3$ conseguir que el parámetro tome el valor *a*. En la segunda etapa, conociendo el valor de *a*, las empresas compiten a la Bertrand eligiendo el precio de manera simultánea.

(a) Describa la situación como un juego dinámico. ¿Cuántos subjuegos hay en este juego? (4 puntos).
(b) Encuentre los equilibrios de Nash de los subjuegos que empiezan en la segunda etapa. (7 puntos).
(c) Encuentre los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos del juego completo. (9 puntos).

(a)



Hay un subjuego para cada valor de *a* elegido por la Empresa 1, es decir, infinitos.

(b) La Empresa 1 resuelve $max_{p_1}\, \Pi_1 = (10a - 2p_1 + p_2)p_1 - a^3$, cuya condición de primer orden da $\frac{\partial \Pi_1}{\partial p_1} = 10a - 4p_1 + p_2 = 0$ y de ahí obtenemos la función de mejor respuesta $p_1 = \frac{10a+p_2}{4}$. (La condición de segundo orden, $\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial (p_1)^2} = -4 < 0$, confirma un máximo). La Empresa 2 resuelve $max_{p_2}\, \Pi_2 = (10a - 2p_2 + p_1)p_2$, cuya c.p.o. da $p_2 = \frac{10a+p_1}{4}$. (La c.s.o. es análoga a la de la Empresa 1). Con las mejores respuesta obtenemos el EN: $(p_1 = \frac{10a}{3}, p_2 = \frac{10a}{3})$.

(c) La Empresa 1 resuelve $max_a\, \Pi_1 = (10a - 2\frac{10a}{3} + \frac{10a}{3})\frac{10a}{3} - a^3$, cuya c.p.o. es $\frac{\partial \Pi_1}{\partial a} = \frac{400a}{9} - 3a^2 = 0$, que da dos puntos críticos: $a = 0$ y $a = \frac{400}{27}$. El máximo beneficio se da para $a = \frac{400}{27}$. La c.s.o. para ese valor es $\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial a^2} = \frac{400}{9} - 6\frac{400}{27} < 0$, que confirma que se trata de un máximo local. La única solución esquina es el punto crítico $a = 0$, que es menor, y a la derecha de $a = \frac{400}{27}$ la función de beneficios es decreciente (la primera derivada es siempre negativa), por lo que es un máximo global.

II.3 Es sábado por la tarde y Jim y Buzz, cada uno en un coche, aceleran hasta un acantilado. El primero que pare será un cobarde (gallina) y el otro será el campeón. Si ambos siguen, caerán por el acantilado, pero si ambos paran serán relativamente menos cobardes. El juego tiene las siguientes estrategias y pagos ("seguir" implica parar solo si el otro lo ha hecho ya).

		Buzz	
		Seguir	Parar 1º
Jim	Seguir	0, 0	4, 1
	Parar 1º	1, 4	3, 3

(a) Encuentre los tres equilibrios de Nash del juego y las utilidades de los jugadores en cada uno de ellos. (4 puntos).
(b) Considere que Jim y Buzz se enfrentan al juego este sábado y el siguiente. ¿Es posible que ambos paren primero este sábado en un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos? Considere que no hay descuento temporal en esta versión del juego. Pista: estudie separadamente cada uno de los cuatro subjuegos posibles de la segunda etapa. Es decir: ¿qué debe proponerse en la estrategia de equilibrio para cada jugador en cada una de estas cuatro posibilidades para que nadie quiera desviarse respecto de (parar 1º, parar 1º) en la primera etapa? (8 puntos).
(c) Considere que Jim y Buzz se enfrentan al juego cada sábado de manera indefinida. ¿Es posible sostener el pago (3, 3) cada sábado en un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos? En esta versión, ambos jugadores descuentan el futuro con una tasa δ. (8 puntos).

(a) EN $= \left\{(\text{Seguir, Parar 1º}), (\text{Parar 1º, Seguir}), \left(\frac{1}{2}[\text{Seguir}] + \frac{1}{2}[\text{Parar 1º}],\ \frac{1}{2}[\text{Seguir}] + \frac{1}{2}[\text{Parar 1º}]\right)\right\}$. Las utilidades respectivas son $(4, 1)$, $(1, 4)$ y $(2, 2)$.

(b) Primer sábado: jugar (Parar 1º, Parar 1º). Segundo sábado:
(i) jugar $\left(\frac{1}{2}[\text{Seguir}] + \frac{1}{2}[\text{Parar 1º}],\ \frac{1}{2}[\text{Seguir}] + \frac{1}{2}[\text{Parar 1º}]\right)$ si se jugó (Parar 1º, Parar 1º) o (Seguir, Seguir) el primer sábado,
(ii) jugar (Seguir, Parar 1º) si se jugó (Parar 1º, Seguir),
(iii) jugar (Parar 1º, Seguir) si se jugó (Seguir, Parar 1º).

La estrategia es un EN en cada subjuego propio, comprobemos que también lo es en el juego entero. Si ambos siguen la estrategia, cada uno obtiene: $u_i = 3 + 2 = 5$. Si uno se desvía pasa a obtener $4 + 1 = 5$, por lo que no gana, y la estrategia es efectivamente un EN.

(c) La más sencilla (no única) es: Primer sábado, jugar (Parar 1º, Parar 1º). Siguientes sábados:
(i) jugar (Parar 1º, Parar 1º) si se jugó (Parar 1º, Parar 1º) en todos los sábados anteriores,
(ii) jugar $\left(\frac{1}{2}[\text{Seguir}] + \frac{1}{2}[\text{Parar 1º}],\ \frac{1}{2}[\text{Seguir}] + \frac{1}{2}[\text{Parar 1º}]\right)$ si en algún sábado anterior no se jugó (Parar 1º, Parar 1º).

La estrategia es equilibrio de Nash: si se sigue cada jugador gana $u_i = 3 + 3\delta + 3\delta^2 + \cdots = 3\frac{1}{1-\delta}$. La mejor desviación es la de un solo periodo (argumentar), que da a quien se desvíe $u_i = 4 + 2\delta + 2\delta^2 + \cdots = 4 + 2\frac{\delta}{1-\delta}$. Para que la desviación no sea beneficiosa debe cumplirse $3\frac{1}{1-\delta} \geq 4 + 2\frac{\delta}{1-\delta}$, o bien: $\delta \geq \frac{1}{2}$.
La estrategia es EN en los subjuegos del caso (i): el juego y la estrategia son como al comienzo del juego, por lo es también un EN.
La estrategia es EN en los subjuegos del caso (ii): la estrategia define un EN en cada repetición, lo que es un EN del subjuego.

II.4 Los países de Anchuria y Borduria están enfrentados en una disputa sobre un territorio rico en petróleo. El valor de este recurso es de 100 mil millones. Cada país tiene dos opciones: escalar el conflicto o negociar. Las decisiones se toman de manera simultánea. Si ambos países deciden negociar, el petróleo se dividirá a partes iguales (esto es, cada país recibirá 50 mil millones). Si un país escala el conflicto y el otro negocia, el país que escala se quedará con todo el petróleo, y el otro país se quedará sin nada. Si ambos países deciden escalar el conflicto tendrá lugar una guerra, y el vencedor se quedará con todo el petróleo, mientras que el perdedor no recibirá nada. Cada país tiene la misma probabilidad de ganar la guerra. No obstante, la guerra es costosa. Ambos saben que la guerra le costará 30 mil millones a Anchuria. El coste para Borduria depende de su capacidad militar, que solo es conocida por Borduria. Si Borduria es fuerte, la guerra le costará 10 mil millones, pero si es débil le costará 50 mil millones. Las probabilidades de que Borduria sea fuerte o débil son las mismas.

(a) Represente la situación como un juego bayesiano. Es decir, muestre todos los elementos del juego bayesiano, incluidas las utilidades en la forma matricial como es costumbre. (4 puntos).
(b) Encuentre los equilibrios de Nash bayesianos en estrategias puras. (8 puntos).
(c) Suponga ahora que si Borduria es fuerte ganará la guerra con toda probabilidad, mientras que si es débil la perderá también con total probabilidad. Todo lo demás permanece igual. Encuentre los equilibrios bayesianos en estrategias puras. Halle también las utilidades de cada tipo en los equilibrios encontrados (8 puntos).

(a) $N = \{A, B\}$, donde A = Anchuria y B = Borduria.
$T_A = \{A\}$; $T_B = \{B_f, B_d\}$, donde f es fuerte y d es débil.
$p(A/ B_f) = 1; p(A/ B_d) = 1; p(B_f/A) = \frac{1}{2}, p(B_d/A) = \frac{1}{2}$.
Acciones de A: $A_A = \{\text{N, E}\}$, donde N es negociar y E es escalar. Acciones de B_f: $A_{B_f} = \{\text{N, E}\}$, acciones de B_d: $A_{B_d} = \{\text{N, E}\}$. Estrategias de A: $S_A = \{\text{N, E}\}$, estrategias de B: $S_B = \{\text{(N, N), (N, E), (E, N), (E, E)}\}$, donde la primera componente de cada estrategia indica la acción de B_f y la segunda, la acción de B_d.
Utilidades:

B_f con $p = \frac{1}{2}$

A \ B_f	N	E
N	50, 50	0, 100
E	100, 0	20, 40

B_d con $p = \frac{1}{2}$

A \ B_d	N	E
N	50, 50	0, 100
E	100, 0	20, 0

(b) Para A, E es una estrategia dominante. Para B_f, E es una acción dominante.
$ENB = \{\text{E}, (\text{E}, p[\text{N}] + (1 - p)[E])\ para\ todo\ p \in [0,1]\}$.

(c) El nuevo juego es:

B_f con $p = \frac{1}{2}$

A \ B_f	N	E
N	50, 50	0, 100
E	100, 0	-30, 90

B_d con $p = \frac{1}{2}$

A \ B_d	N	E
N	50, 50	0, 100
E	100, 0	70, -10

$ENB = \{\text{E, (E, N)}\}$. B está claramente usando su mejor respuesta frente a la estrategia E por parte de A. Veamos el caso de A: si B juega (E, N), $u_A(N, (E, N)) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}50 = 25$, mientras que $u_A(E, (E, N)) = \frac{1}{2}(-30) + \frac{1}{2}100 = 35$, que es mayor.
Si A juega N, la mejor respuesta de B es (E, E), pero frente a (E, E) la mejor respuesta de A no es N, que da 0; sino E., que da $\frac{1}{2}(-30) + \frac{1}{2}70 = 20$: no hay más ENB en estrategias puras.