Teoría de Juegos
Examen de enero de 2014

Nombre: Grupo:

Tiene dos horas y media para completar el examen.

I. Preguntas cortas (20 puntos).

I.1 Cuando un jugador elige una estrategia en equilibrio, las estrategias puras que son parte de ella pueden dar distintos pagos a este jugador. Verdadero o falso, razone la respuesta.

No. Si, p.e., la estrategia mixta S da una probabilidad p a la estrategia pura A y q a la B y si A diera pagos mayores que la B, entonces otra estrategia mixta X que fuera igual que S excepto por que A pasa a ser jugada con probabilidad p+q y B con probabilidad cero daría mayores pagos.

I.2 Eliminando una o más de sus estrategias, un jugador puede procurarse un mejor resultado. Explique por qué sí o por qué no. Muestre un ejemplo.

Sí es posible:

	A	B
A	5,5	0,4
B	6,0	1,1

Si el jugador fila elimina su estrategia B, el equilibrio pasa de ser (B,B) a ser (A,A) y su pago en equilibrio pasa de 1 a 5.

I.3 En un juego repetido un número finito de veces los jugadores pueden tener pagos superiores a los de los equilibrios de Nash a condición de que haya más de uno. Verdadero o falso, razone la respuesta.

Sí. Pongamos que hay dos EN y que uno ofrece pagos por encima del otro. Si hay una combinación de estrategias que dé pagos superiores a ambos, puede haber un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos que implique jugar ese perfil y que, en caso de desviación se castigue con el equilibrio de Nash con menores pagos y, en caso de no desviarse, jugar en el último periodo el equilibrio de Nash con mejores pagos.

I.4 Si un jugador en un juego bayesiano tiene dos tipos y cada uno de ellos puede elegir su acción entre tres posibles, ¿cuántas estrategias puras tiene ese jugador?

La estrategia de un jugador debe indicar una acción para cada uno de sus tipos. Si hay dos tipos y cada uno tiene tres acciones posibles, el número de estrategias puras será de 3x3=9.

II. Problemas. Debe contestar cuatro de los siguientes problemas. (20 puntos cada uno).

II.1 Dos empresas, A y B, son las únicas productoras de leche en una pequeña isla tropical. Su leche es idéntica en, sabor, color, nutrientes e, incluso, empaquetamiento. Compiten a la Bertrand: la que ponga el precio más barato se llevará todo el mercado, mientras que si ponen el mismo precio se lo reparten a medias. La demanda de este mercado es $D = 100 - p$, el coste marginal de la Empresa A es 0 y el de la Empresa B, 40. La Empresa i solo puede poner precios que sean números enteros comprendidos entre su coste marginal y 100.

(a) Encuentre la función de beneficios de cada empresa como función de los dos precios. (5 puntos)
(b) Encuentre la función de reacción de cada empresa. (7 puntos)
(c) Encuentre los equilibrios de Nash y los beneficios en cada equilibrio. (8 puntos)

(a) Si $p_A > p_B$: $\Pi_A = 0$, $\Pi_B = (100 - p_B)(p_B - 40)$.
Si $p_A = p_B = p$, $\Pi_A = ((100 - p)/2)p$, $\Pi_B = ((100 - p)/2)(p - 40)$.
Si $p_A < p_B$, $\Pi_A = (100 - p_A)p_A$, $\Pi_B = 0$.

(b) MR_A: Si $p_B > 50$, $p_A = 50$ (precio de monopolio de A)
Si $40 < p_B \leq 50$, $p_A = p_B - 1$

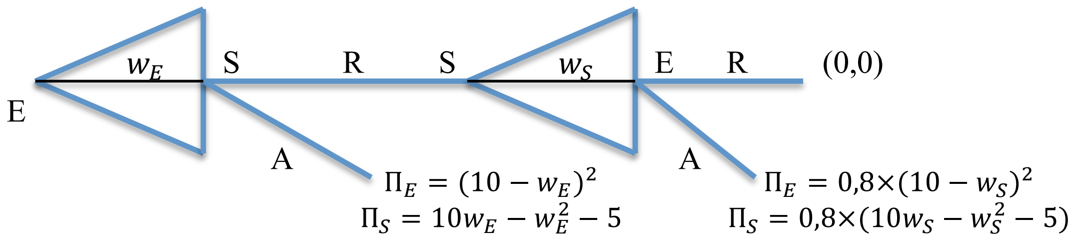
MR_B: Si $p_A > 70$, $p_B = 70$ (precio de monopolio de B)
Si $41 < p_A \leq 70$, $p_B = p_A - 1$
Si $p_A = 41$, $p_B = 41$
Si $p_A \leq 40$, $p_B \geq 40$.

(c) Equilibrios de Nash = {(40, 41), (39, 40)}. $\Pi_A(40{,}41) = 60\times 40 = 2400$, $\Pi_B(40{,}41) = 0$, $\Pi_A(39{,}40) = 61\times 39 = 2379$, $\Pi_B(39{,}40) = 0$.

II.2 Una empresa negocia con un sindicato el salario para sus trabajadores. La función de beneficios de la empresa es $\Pi_E = (10 - w)^2$, donde *w* es el salario. El objetivo del sindicato es maximizar $\Pi_S = 10w - w^2 - 5$. Las reglas de la negociación son las siguientes. La empresa hace una oferta que el sindicato puede aceptar o rechazar. En caso de aceptación la negociación termina. En caso de rechazo el sindicato presenta una contra-oferta que la empresa puede aceptar o rechazar. Si la contra-oferta se rechaza no hay producción y ambas partes ganan cero. Si una oferta se acepta, ambas partes tendrán sus beneficios según el acuerdo alcanzado. El factor de descuento de ambos jugadores es 0,8.

(a) Muestre la forma extensiva de este juego. Indique las estrategias de los dos jugadores y sus conjuntos de información. (5 puntos)
(b) ¿Qué salario ofrecerá el sindicato si el juego alcanza la segunda etapa? ¿Cuáles son los beneficios de cada uno en este caso? (5 puntos)
(c) Encuentre el único equilibrio de Nash perfecto en subjuegos de este juego de negociación. ¿Qué salario se acordará? ¿Cuáles son los beneficios? ¿Cuándo tendrá lugar el acuerdo? (10 puntos)

(a)



(b) El sindicato resolverá el problema:

$$\max \Pi_S = 10w - w^2 - 5$$
$$\text{s.a: } \Pi_E = (10 - w)^2 \geq 0$$

De ahí: $w = 5$. Beneficios del sindicato = 20, beneficios de la empresa = 25.

(c) Sabiendo el equilibrio de la segunda etapa, en la primera, la empresa buscará el mínimo *w* que le deje al sindicato con los beneficios descontados que obtendrá en la segunda etapa. Así ofrecerá w tal que:

$$10w - w^2 - 5 = 0{,}8\times 20$$

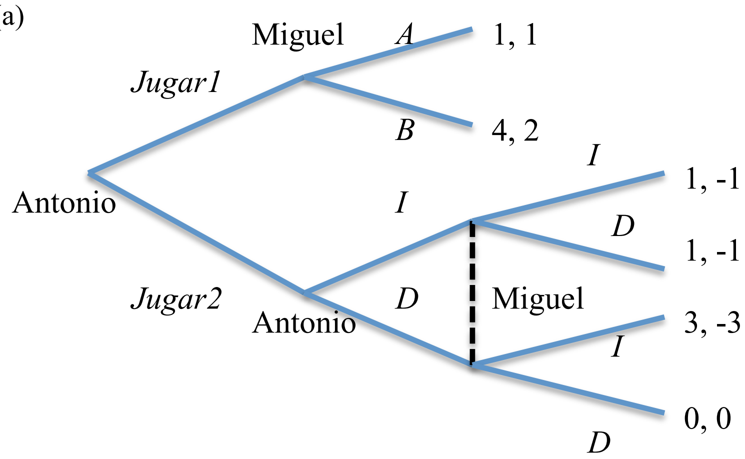
de ahí $w = 3$. El sindicato aceptará. En caso de rechazo, se sigue como en el apartado (b). Beneficios del sindicato = 16, beneficios de la empresa = 49.

II.3 Antonio y Miguel se enfrentan en el siguiente juego. Antonio debe elegir entre dos acciones: *Jugar1* y *Jugar2*. Si elige *Jugar1*, Miguel, a continuación, deberá elegir entre *A* y *B*. Si elige *A* ambos se llevarán un pago de uno, si elige *B*, Antonio obtendrá un pago de 4 y Miguel de 2. Si, por el contrario, Antonio elige *Jugar2*, ambos jugadores jugarán un juego simultáneo donde Antonio (jugador fila) elegirá entre *I* y *D*, las mismas alternativas que tiene Miguel (jugador columna). Los pagos de este juego simultáneo son:

	I	*D*
I	1, -1	1, -1
D	3, -3	0, 0

(a) Represente el juego en forma extensiva. (3 puntos)
(b) Encuentre todos los equilibrios de Nash del juego simultáneo que comienza si Antonio elige *Jugar2*. (10 puntos)
(c) Encuentre los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos del juego completo (7 puntos)

(a)



(b) EN = $\{(I, q[I] + (1-q)[D])$ con $q \leq \frac{1}{3}\}$

(c) ENPS = $\{(Jugar1, I), (B, q[I] + (1-q)[D])$, con $q \leq \frac{1}{3}\}$

II.4 Considere la repetición infinita del juego del dilema del prisionero que se detalla a continuación, donde $x \geq 5$ y cada jugador descuenta los pagos futuros según el factor de descuento $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1}{2}$.

	C	*D*
C	4, 4	0, x
D	x, 0	1, 1

(a) Encuentre los valores de x tales que la estrategia gatillo sostiene el resultado (*C*,*C*) en cada periodo en un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. (10 puntos)

(b) Sea $x \geq 6{,}5$ y considere el siguiente perfil de estrategias: Los jugadores juegan *C* mientras nadie se desvíe de jugar *C*. Si alguien se desvía, entonces ambos juegan *D* durante 2 periodos, para volver a jugar *C* en el siguiente y seguir así hasta que alguien se vuelva a deviar, en cuyo caso se repiten los dos periodos de castigo, y así sucesivamente. ¿Es esta estrategia un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos? (10 puntos)

(a) $u_i(\text{estrategia gatillo}) = 4\frac{1}{1-\delta} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8.$

$u_i(\text{desviarse a D}) = x + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = x + 1.$

$8 \geq x + 1 \rightarrow x \leq 7.$

(b) $u_i(\text{estrategia con castigo de dos periodos}) = 4\frac{1}{1-\delta} = \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8.$

$u_i(\text{desviarse a D}) = x + \frac{1}{2}1 + (\frac{1}{2})^2 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = x + 1{,}75 \geq 8{,}25.$ No es EN.

II.5 Considere el siguiente juego bayesiano. Dos jugadores, *A* (que elige fila) y *B* (columna), juegan el juego del gallina descrito a continuación. Cada uno debe decidir si continuar conduciendo hacia un acantilado (*C*) o parar el coche (*S*). El Jugador *A* puede ser de dos tipos: o bien es normal, en cuyo caso los pagos son los habituales del juego del gallina

	C	*S*
C	-5, -5	1, -1
S	-1, 1	0, 0

o bien es un flojo, en cuyo caso los pagos son

	C	*S*
C	-5, -5	1, -1
S	0, 1	2, 0

El Jugador *A* sabe si es un flojo o no. El Jugador *B* piensa que con probabilidad ½ el Jugador *A* es un flojo y con probabilidad ½ es normal.

(a) Describa todos los elementos de este juego bayesiano. (5 puntos)
(b) Encuentre los equilibrios de Nash bayesianos en estrategias puras. (15 puntos)

(a) Jugadores = {A, B}
Tipos de A = {Normal, Flojo}
Tipos de B = {B}

$(p(A = \text{normal}/B) = \frac{1}{2}, p(A = \text{flojo}/B) = \frac{1}{2})$,
$p(B = B/A = \text{normal}) = 1$,
$p(B = B/A = \text{flojo}) = 1$.

Acciones de A = {C, S}, acciones de B = {C, S}

Utilidades según acciones y tipos: las mostradas en las tablas que recogen los pagos.

(b) ENB en estrategias puras = $\{\big((S,S),C\big),\big((C,S),S\big)\}$.