Teoría de Juegos
Examen enero 2019

Nombre: **Grupo:**

Tiene dos horas y media para completar el examen. No se puede usar calculadora.

I Preguntas cortas (5 puntos cada una)

I.1 En un juego simultáneo con dos jugadores y dos estrategias para cada uno de los jugadores, ¿cuál es el máximo número de equilibrios de Nash que puede haber en estrategias puras? ¿Cuál es el número mínimo? Ponga un ejemplo de cada caso.

Número máximo: 4, es el máximo número de combinaciones de estrategias y hay juegos con ese número de EN. Número Mínimo: 0.

1, 1	1, 1
1, 1	1, 1

4 EN

1, -1	-1, 1
-1, 1	1, -1

0 EN

I.2 Si dos vértices en un juego en forma extensiva pertenecen a un mismo conjunto de información, entonces de cada uno de estos dos vértices saldrán un mismo número de ramas. ¿Cierto o falso?

Cierto. Si tienen un número de ramas distinto, el jugador puede distinguir los vértices contando las ramas.

I.3 ¿Cuál es la diferencia entre subastas al primer y al segundo precio?

En la subasta al primer precio la ganadora paga su puja. En la subasta al segundo precio paga la segunda puja más alta.

I.4 Considera una elección por mayoría con tres votantes (1, 2 and 3) y tres alternativas (A, B y C). En caso de empate, C será elegida. El Votante 1 prefiere las alternativas en el orden ABC, el 2 en el orden BAC y el 3 en el orden CAB. Encuentra todos los equilibrios de Nash en estrategias puras que satisfacen (i) A resulta elegida, y (ii) ningún votante vota por su alternativa menos preferida.

Hay 4 posibles candidatos que satisfacen (i) y (ii):

(A, A, A): Es un EN. Ninguna desviación individual cambia el resultado.
(A, A, C): Es un EN. Si el Votante 1 se desvía, no se elegirá A y estará peor. Si el Votante 2 se desvía, se elegirá C y estará peor. Si la Votante 3 se desvía no cambia el resultado.
(A, B, A): No es un EN. Si la Votante 3 se desvía a C, C saldrá elegida y estará mejor.
(B, A, A): No es un EN. Si el Votante 2 se desvía a B, B saldrá elegida y estará mejor.

II. Problemas (20 puntos cada uno)

II.1 Los 10 vecinos de un barrio comparten un parque que todos prefieren tener lo más limpio posible, pero a todos les cuesta tirar la basura a la papelera. El parque limpio es valorado por cada vecino en 100 y de ahí se descuentan 10 por cada vecino que decide no ser limpio. A cada vecino le cuesta 15 ser limpio. Si un vecino decide no ser limpio, sentirá una reprobación moral igual a dos veces el número de vecinos que deciden ser limpios. Esta reprobación moral es un coste que restar a la valoración.

(a) Defina la situación anterior como un juego en forma normal. Pista: para definir las funciones de utilidad basta que considere la del Vecino i cuando entre los restantes vecinos haya k que decidan ser limpios (y por tanto $9 - k$ que decidan no serlo). (5 puntos)
(b) Suponga que todos los vecinos deciden ser limpios. ¿Es esta situación un EN? (5 puntos)
(c) Suponga que todos los vecinos deciden no ser limpios. ¿Es esta situación un EN? (5 puntos)
(d) Suponga que 5 vecinos eligen ser limpios y 5 eligen no serlo. ¿Es esta situación un EN? (5 puntos)

(a)
$u_i(i \text{ limpio}, k \text{ otros limpios}, 9 - k \text{ otros no limpios}) = 100 - 10(9 - k) - 15 = 10k - 5.$
$u_i(i \text{ no limpio}, k \text{ otros limpios}, 9 - k \text{ otros no limpios}) = 100 - 10(10 - k) - 2k = 8k.$

(b) $u_i(\text{todos limpios}) = 100 - 15 = 85.$ $u_i(\text{todos limpios menos } i) = 72.$ El Vecino i no se desvía. La situación es un EN.

(c) $u_i(\text{todos no limpios}) = 0.$ $u_i(\text{todos no limpios excepto } i) = -5.$ El Vecino i no se desvía. La situación es un EN.

(d) $u_i(i \text{ limpio}, 4 \text{ otros limpios}, \ 5 \text{ otros no limpios}) = 35.$
$u_i(i \text{ no limpio}, 4 \text{ otros limpios}, \ 5 \text{ otros no limpios}) = 32.$
Un vecino limpio no se desvía.

$u_i(i \text{ no limpio}, 5 \text{ otros limpios}, \ 4 \text{ otros no limpios}) = 40.$
$u_i(i \text{ limpio}, 5 \text{ otros limpios}, \ 4 \text{ otros no limpios}) = 45.$
Un vecino no limpio se desvía.

No es un EN.

II.2 Dos vecinas tienen ambas un día libre que pueden usar estar con su familia o realizar un trabajo para su comunidad. Si t_i es la cantidad de tiempo que la Vecina *i* dedica a la comunidad, $(1 - t_i)$ es el tiempo que pasará con su familia ($t_i \in [0, 1]$). A ambas les gusta que su comunidad funcione y también pasar tiempo con la familia. Sus funciones de utilidad respectivas son:

$$u_1(t_1, t_2) = 2t_1 - t_1 t_2 - \frac{1}{2} t_1^2 + (1 - t_1)$$
$$u_2(t_1, t_2) = 2t_2 - t_1 t_2 - \frac{1}{2} t_2^2 + (1 - t_2),$$

donde $2t_i - t_i t_j - \frac{1}{2} t_i^2$ representa la utilidad de la Vecina *i* de vivir en una comunidad que funciona y $(1 - t_i)$ es la utilidad de pasar tiempo con su familia. El proceso de decisión sobre el tiempo que dedican a la comunidad se realiza de forma secuencial. Primero decide la Vecina 1 y, una vez la Vecina 2 conoce cuanto tiempo le dedicará la Vecina 1, la Vecina 2 decide cuánto tiempo dedicar.

(a) Calcule el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. (8 puntos)
(b) Calcule el camino de equilibrio y las utilidades de las vecinas en el equilibrio. (6 puntos)
(c) Si la decisión se tomara de forma simultánea, ¿obtendría alguna ventaja la Vecina 1 en comparación con el caso secuencial? (6 puntos)

(a) La mejor respuesta del Vecino 2:
$max_{t_2}\, u_2(t_1, t_2) = 2t_2 - t_1 t_2 - \frac{1}{2} t_2^2 + (1 - t_2),$
Las condiciones de primer orden para un máximo son $2 - t_1 - t_2 - 1 = 0$, y dan $t_2 = 1 - t_1$. Nótese que las condiciones de segundo orden se satisfacen: $-1 < 0$.

Anticipando lo anterior, el Vecino 1 resuelve:
$max_{t_1}\, u_1(t_1, t_2) = 2t_1 - t_1 t_2 - \frac{1}{2} t_1^2 + (1 - t_1)$
s.r. $t_2 = 1 - t_1$

o

$max_{t_1}\, 2t_1 - t_1(1 - t_1) - \frac{1}{2} t_1^2 + (1 - t_1) = \frac{1}{2}(t_1)^2 + 1,$

Esta función es creciente en t_1, lo que significa que carece de máximos globales o locales, y que el máximo se alcanza para el mayor valor de t_1 que satisfaga las restricciones. I.e., $t_1 = 1$. Alternativamente, se puede observar que las condiciones de segundo orden son: $\frac{1}{2} > 0$, lo que implica que no hay máximos.

El ENPS es $(t_1 = 1,\ t_2 = 1 - t_1)$.

(b) Camino de equilibrio: $(t_1 = 1,\ t_2 = 0)$. Utilidades en el equilibrio: $u_1 = \frac{3}{2}, u_2 = 1$.

(c) Las mejores respuestas son $t_2 = 1 - t_1$ y $t_1 = 1 - t_2$. Son la misma ecuación, que definen infinitos equilibrios que cumplen: todos los pares (t_1, t_2) que satisfacen $t_1 + t_2 = 1$. En (a) vimos que el mejor caso para el Vecino 1 se da cuando $t_1 = 1$ (y $t_2 = 0$), lo que significa que, entre todos estos equilibrios, solo uno le da la misma utilidad, mientras que todos los demás le dan menos. No hay ninguna ventaja para el Vecino 1 en el case simultáneo.

II.3 Considere el juego repetido que consiste en jugar el siguiente juego estático un número infinito de veces con un factor de descuento $\delta = \frac{3}{4}$.

		Jugador 2	
		C	D
Jugadora 1	C	4, 4	0, 6
	D	6, 0	2, 2

La estrategia toma y daca para el Jugador i se define así: en $t = 1$ juega C; en $t > 1$ juega lo que el Jugador j jugó en $t - 1$. Considere las siguientes desviaciones de la estrategia toma y daca por parte de la Jugadora 1 al comienzo del juego:

Desviación 1: En el periodo primero juega D y luego sigue la estrategia toma y daca.
Desviación 2: En los dos periodos primeros juega D y luego sigue la estrategia toma y daca.

(a) Muestra que ninguna de estas desviaciones da más pagos a quien la realiza que toma y daca. (10 puntos)
(b) Muestra que ninguna otra desviación a partir del primer periodo da más pagos para quien se desvía que la mejor de las desviaciones 1 y 2. En otras palabras, toma y daca es un equilibrio de Nash. (4 puntos)

Note cómo toma y daca hace recomendaciones diferentes en cuatro tipos de subjuegos para $t > 1$: aquellos que empiezan cuando en el periodo anterior el juego ha sido (C, C), (C, D), (D, C) o (D, D).

(c) Muestre que, al menos en uno de esos subjuegos, toma y daca no es un equilibrio de Nash (y, por tanto, no es un ENPS del juego entero). (6 points)

(a) Siguiendo la estrategia toma y daca, los jugadores obtienen 4 en cada periodo: $u_i = \frac{4}{1-\frac{3}{4}} = 16$.
Desviación 1:
Si un jugador usa la desviación, obtiene 6 en el primer periodo, luego 0 y 6 en periodos alternos, dando una utilidad de
$u_i = 6 + 0\delta + 6\delta^2 + 0\delta^3 + 6\delta^4 + 0\delta^5 + \cdots = 6 + 6\delta^2 + 6\delta^4 + \cdots = \frac{6}{1-\delta^2} = \frac{6}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{96}{7}$,
menor que 16. Por lo tanto, no quiere usar la Desviación 1.

Desviación 2:
Si un jugador usa la desviación, obtiene 6 en el primer periodo, y luego 2 a partir de ahí, con una utilidad de $u_i = 6 + 2\delta + 2\delta^2 + 2\delta^3 + \cdots = 6 + \frac{2\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 12$, menor que 16. Por lo tanto, no quiere usar la Desviación 2.

(b) Toma y daca implica jugar: (C,C), (C,C), (C,C), (C,C), (C,C), (C,C),…
La desviación 1 por parte del Jugador 1 implica: (D,C)*, (C,D), (D,C), (C,D), (D,C), (C,D),…
La desviación 2 por parte del Jugador 1 implica: (D,C)*, (D,D)*, (D,D), (D,D), (D,D), (D,D),…
(*) indica el periodo de la desviación.
Si el Jugador 1 se desvía en los periodos 1 y 3, se jugará: (D,C)*, (C,D), (C,C)*, (C,C), (C,C), (C,C),…
Si el Jugador 1 se desvía en los periodos 1 y 4, se jugará: (D,C)*, (C,D), (D,C), (D,D)*, (D,D), (D,D),…

Observamos que las desviaciones de dos periodos implican: (i) alternar entre (C,D) y (D,C), (ii) (C,C) para siempre, o (iii) (D,D) para siempre. Una desviación de 3 o más periodos tendrá las mismas consecuencias. Sabemos que la alternancia y que (D, D) para siempre son ambas un castigo suficientemente fuerte para evitar la tentación del 6 en el primer periodo. ¿Y qué pasa con la otra posibilidad de desviarse en el primer periodo y luego dos periodos más adelante para volver a (C,C)? La única diferencia se da en los dos primeros periodos, y $6 + 0\frac{3}{4} < 4 + 4\frac{3}{4}$. Tampoco merece la pena.

(c) Considérese el subjuego tras (C, D), de acuerdo con toma y daca los jugadores deben alternar entre (D, C) y (C, D). El Jugador 1 obtiene pagos que alternan entre 6 y 0, con una utilidad de $u_1 = 6 + 0\delta + 6\delta^2 + 0\delta^3 + \cdots = \frac{96}{7}$. Si se desvía y juega C en lugar de D, obtiene 4 en todos los periodos, con $u_1 = 16$.

II.4 Considere un duopolio de Cournot con dos empresas que operan en un mercado cuya función inversa de demanda es $P = A - Q$, donde $Q = q_1 + q_2$ es la cantidad total vendida en el mercado. Suponga que hay incertidumbre sobre el valor de *A*, que con probabilidad $p = \frac{1}{2}$ toma el valor $A = 36$, y con probabilidad $1 - p = \frac{1}{2}$ es $A = 24$. Los costes de producción son cero para ambas empresas. La Empresa 2 tiene información acerca del valor de *A*, pero la Empresa 1 solo conoce las probabilidades anteriores. Ambas empresas deciden de manera independiente y simultánea sus respectivas cantidades, q_1 y q_2.

(a) Describa la situación anterior como un juego bayesiano. (5 puntos)
(b) Encuentre el equilibrio bayesiano. (9 puntos)

Suponga ahora que la Empresa 2 puede informar a la Empresa 1 de manera creíble cuál es el valor de *A* (por ejemplo, le permite visitar sus instalaciones).

(c) ¿Le dará esta información si $A = 36$? ¿Y si $A = 24$? ¿Qué podrá inferir la Empresa 1 si la Empresa 2 no le comunica el valor de *A*? (6 puntos)

(a) $N = \{1, 2\}$;
$T_1 = \{t_1^1\}, T_2 = \{t_2^1, t_2^2\}$;
$\left(p(t_2^1|t_1^1) = \frac{1}{2}, p(t_2^2|t_1^1) = \frac{1}{2}\right), (p(t_1^1|t_2^1) = 1), (p(t_1^1|t_2^2) = 1)$;
$A_{t_1^1} = A_{t_2^1} = A_{t_2^2} = \{q_t \in [0, \infty)\}$;
$u_{t_1^1} = \frac{1}{2}\left(36 - q_{t_1^1} - q_{t_2^1}\right)q_{t_1^1} + \frac{1}{2}\left(24 - q_{t_1^1} - q_{t_2^2}\right)q_{t_1^1}$,
$u_{t_2^1} = \frac{1}{2}\left(36 - q_{t_1^1} - q_{t_2^1}\right)q_{t_2^1}$,
$u_{t_2^2} = \frac{1}{2}\left(24 - q_{t_1^1} - q_{t_2^2}\right)q_{t_2^2}$.

(b) Las condiciones de primer orden son, respectivamente (compruébese que las de segundo orden se satisfacen):

$$q_{t_1^1} = \frac{1}{2}\frac{36-q_{t_2^1}}{2} + \frac{1}{2}\frac{24-q_{t_2^2}}{2}, \; q_{t_2^1} = \frac{36-q_{t_1^1}}{2}, \; q_{t_2^2} = \frac{24-q_{t_1^1}}{2}.$$

Resolviendo el sistema se encuentra el equilibrio bayesiano: $(q_{t_1^1} = 10, q_{t_2^1} = 13, q_{t_2^2} = 7)$.

(c) En equilibrio los pagos son $u_{t_1^1} = 100, u_{t_2^1} = 169, u_{t_2^2} = 49$.

(i) Si t_2^1 informa creíblemente sobre *A*, entonces la función de reacción de t_1^1 será $q_{t_1^1} = \frac{36-q_{t_2^1}}{2}$, que, junto con $q_{t_2^1} = \frac{36-q_{t_1^1}}{2}$ da como solución $q_{t_1^1} = 12, q_{t_2^1} = 12$, con unos beneficios para t_2^1: $u_{t_2^1} = 144$, menores que 169, por lo que no informará sobre *A*.

(ii) Si t_2^2 informa creíblemente sobre *A*, la función de reacción de t_1^1 será $q_{t_1^1} = \frac{24-q_{t_2^2}}{2}$, que, junto con $q_{t_2^2} = \frac{24-q_{t_1^1}}{2}$, da como solución $q_{t_1^1} = 8, q_{t_2^2} = 8$, con unos beneficios para t_2^2: $u_{t_2^2} = 64$, mayores que 49, por lo que sí informará acerca de *A*.

(iii) Si t_2^1 no recibe información por parte de la Empresa 2 acerca de *A*, inferirá que la Empresa 2 es del tipo t_2^1. Si fuera del tipo t_2^2, la Empresa 2 le habría informado sobre *A*.