Teoría de Juegos
Examen de enero de 2013

Nombre   Grupo:

Tiene dos horas y media para completar el examen.

I. Preguntas cortas (20 puntos).

I.1 Las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas. Si una afirmación es cierta, ofrezca una explicación. Si es falsa ponga un contraejemplo.

a) Cualquier ENPS es también un EN.
b) Si un juego no tiene subjuegos propios el conjunto de ENPS coincide con el conjunto de EN.

I.2 Dos empresas idénticas compiten en cantidad en un mercado. Explique las implicaciones derivadas del cambio del juego estático (Cournot) al juego dinámico (Stackelberg): quién gana, quién pierde y por qué.

I.3 Defina los elementos de un juego bayesiano y el concepto de equilibrio de Nash bayesiano.

I.4 En un juego repetido un número finito de veces siempre se podrá encontrar un ENPS en el que los pagos sean óptimos de Pareto. Razone si la afirmación anterior es cierta o falsa.

Soluciones:

I.1 a) Cierto: Un ENPS es, por definición, un EN del juego que, además, lo es en cada subjuego. (2,5 puntos)
b) Cierto: Por lo anterior, al no haber subjuegos, basta con que sea EN para satisfacer la definición. (2,5 puntos)

I.2 En los casos vistos en clase, la empresa líder gana y la seguidora pierde en Stackelberg respecto a lo que obtendrían en Cournot. La razón es que las funciones de reacción indican que al aumentar la cantidad que produce la rival, una empresa deber reducir la suya. La líder tiene la ventaja de adelantarse y poder aumentar su producción, sabiendo que la seguidora disminuirá la suya. (5 puntos)

I.3 Conjunto de jugadores: N={1,2,…,n}
Conjunto de tipos: $T=\{T_1,T_2,\ldots T_n\}$, donde T_i es el conjunto de tipos del Jugador i.
Probabilidades de los tipos: Para cada tipo de cada jugador debe especificarse la probabilidad que se asigna a los tipos de los demás jugadores: $p_i(t_{-i}/t_i)$, donde $t_{-i} \in T_{-i}$ y $t_i \in T_i$.
Conjunto de acciones para cada tipo de cada jugador: A_i.
Función de pagos: $u_i(a_i, a_{-i};\ t_i, t_{-i})$, donde $a_{-i} \in A_{-i}$ y $a_i \in A_i$, $t_{-i} \in T_{-i}$ y $t_i \in T_i$.
(1 punto cada elemento)

I.4 Falso. Si solo hay un equilibrio de Nash en el juego estático, su repetición solo tendrá como equilibrio la repetición del EN en cada etapa de cada subjuego. El EN no tiene por qué ser óptimo de Pareto, como se ve, por ejemplo, en el juego del dilema del prisionero. (5 puntos)

II. Problemas. Debe contestar cuatro de los siguientes problemas. (20 puntos cada uno).

II.1 La inteligencia de EEUU sospecha que Corea del Norte está pensando en poner en marcha un programa para fabricar misiles nucleares. Este hecho afectaría gravemente a la estabilidad en la zona. Según el testimonio de alguna de las pocas personas que han podido huir del país las condiciones de la población del país son muy penosas. Este hecho impulsa a las autoridades norteamericanas a proponer a Corea del Norte el siguiente acuerdo:

- EEUU dará en concepto de ayuda a Corea del Norte 25 millardos de dólares a cambio de que Corea se comprometa a renunciar a su programa nuclear.
- El acuerdo indica que esta ayuda se concederá una vez firmado el acuerdo, pero Corea se compromete a devolverla si EEUU consigue pruebas claras de que el programa nuclear sigue adelante (asuma que este compromiso es creíble). En caso de no contar con pruebas, Corea no devolverá la ayuda.
- Para ello EEUU podrá hacer que las instalaciones sean visitadas por los técnicos de la Agencia Internacional de la Energía Atómica, el coste de esta inspección será pagado por EEUU y es de 10 millardos de dólares.

La agencia de inteligencia de Estados Unidos valora en 90 millardos de dólares la estabilidad en la zona y para Corea del Norte renunciar a su programa nuclear tiene un coste estimado de 20 millardos de dólares.

a) Indique el conjunto de estrategias de cada jugador, los pagos de cada jugador para cada par de estrategias y represente el juego en forma normal.
b) Encuentre los equilibrios de Nash del juego anterior.
c) ¿Cuáles son los pagos esperados de cada jugador en cada equilibrio?

Supongamos que EEUU se plantea aumentar la ayuda a Corea del Norte de 25 a 30 millardos de dólares.

d) Calcule la utilidad esperada de EEUU en el nuevo equilibrio. ¿Encuentra alguna paradoja con la situación en c)? Explíquela.

a) (4 puntos) Jugadores EEUU (1) y Corea del Norte (2)
Estrategias: $S_1 = \{I, NI\}$ I= Inspeccionar, NI= No inspeccionar
$S_2 = \{M,NM\}$ M=Mantener programa, NM=No mantener programa

	M	NM
I	-10, 0	55, 5
NI	-25, 25	65, 5

b) (4 puntos) EN = {(4/5, 2/5)}

c) (4 puntos) $U_1(4/5, 2/5) = 29$, $U_2(4/5, 2/5) = 5$

d)

	M	NM
I	-10, 0	50, 10
NI	-30, 30	60, 10

EN = {(2/3, 1/3)}
$EU_1=30 > 29$ y $p = 2/3$ y $q = 1/3$.
(4 puntos)

Paradoja: EEUU aumenta la ayuda, pero recibe un pago más alto en equilibrio. La razón es que el aumento de la ayuda hace que Corea del Norte tenga más incentivos a aceptarla y no engañar, EEUU por su parte inspeccionará con menor probabilidad. Todas esto aumenta el beneficio y disminuye el coste para EEUU. (4 puntos)

II.2 Tarde y Mercadina son los dos únicos supermercados que compiten en Getafe. La demanda para los productos de Tarde está dada por $q_1(p_1, p_2) = 11 - p_1 + 0.5p_2$. La demanda para los productos de Mercadina está dada por $q_2(p_1, p_2) = 11 - p_2 + 0.5p_1$. Ambos supermercados tienen unos costes dados por la función $C(q) = 4q$.

a) Encuentre el equilibrio de Nash cuando ambos supermercados deciden sus precios simultáneamente. Calcule los beneficios resultantes.

Suponga ahora que, previamente a la elección de precios, Tarde puede desarrollar una nueva tecnología al coste de 10 unidades, que reducirá su coste marginal a cero. Sin embargo, Mercadina podrá copiar inmediatamente esa tecnología pagando un coste fijo de 5.

b) Calcule en ENPS. ¿Desarrollará Tarde la nueva tecnología?

a) Tarde resuelve el siguiente problema:

$max_{p_1}(11 - p_1 + 0.5p_2)(p_1 - 4)$
(2 puntos)

De las CPO obtenemos la función de reacción: $p_1 = \frac{15+0,5p_2}{2}$.

De manera similar para Mercadina obtenemos: $p_2 = \frac{15+0,5p_1}{2}$.
(4 puntos)
Resolviendo el sistema formado por las dos funciones de reacción obtenemos $p_1 = p_2 = 10$.
(2 puntos)
Sustituyendo en las funciones de beneficios: $\Pi_1 = \Pi_2 = 36$.
(2 puntos)

b) Si Tarde no desarrolla la tecnología se seguirá el juego resuelto en a).
(2 puntos)
Si Tarde desarrolla la tecnología resolverá el siguiente problema:

$max_{p_1}(11 - p_1 + 0.5p_2)p_1$
(1 punto)

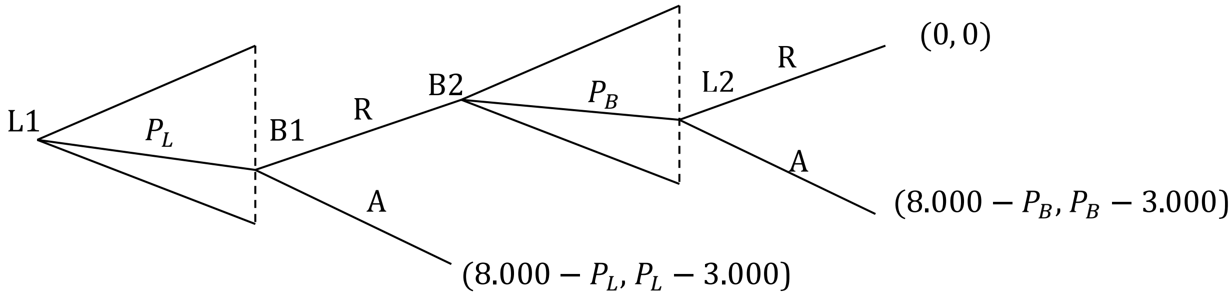
De las CPO obtenemos la función de reacción: $p_1 = \frac{11+0,5p_2}{2}$

De manera similar para Mercadina obtenemos: $p_2 = \frac{11+0,5p_1}{2}$.
(1 punto)
Resolviendo el sistema formado por las dos funciones de reacción obtenemos $p_1 = p_2 = \frac{22}{3} = 7{,}33$.
(1 punto)
Sustituyendo en las funciones de beneficios (sin olvidar restar el coste fijo): $\Pi_1 = 43{,}72$, $\Pi_2 = 48{,}72$.
(1 punto)
A pesar de que Mercadina le copia y consigue más beneficios, a Tarda le interesa desarrollar la nueva tecnología.
(1 punto)
El ENPS es:
Tarda: (Desarrolla la tecnología, $p_1 = 10\ si\ no\ desarrolla, p_1 = 7{,}33\ si\ desarrolla$).
Mercadina: ($p_2 = 10\ si\ no\ desarrolla, p_2 = 7{,}33\ si\ desarrolla$).
(3 puntos).

II.3 Borja y Lorenzo son dos amigos que se encuentran negociando el precio de venta de la moto de 1.000 cc que posee Borja y que Lorenzo está interesado en adquirir. El valor de la moto para Borja es de 3.000 euros, y de 8.000 euros para Lorenzo. Para el proceso de negociación acuerdan que en primer lugar será Lorenzo en ofrecer un precio por la moto, siendo Borja quien decidirá si lo acepta o no lo acepta. En caso de aceptar la negociación se dará por finalizada. Si no acepta dicha oferta de Lorenzo, será Borja quien pedirá un precio por la moto, siendo Lorenzo quien acepte o no acepte la propuesta. Si al final de la negociación no llegan a un acuerdo, se terminarán las negociaciones y cada uno recibirá un pago de cero. En caso de indiferencia entre aceptar o rechazar una oferta supondremos que ambos amigos siempre aceptan. Los dos amigos valoran igual los pagos futuros que los presentes.

a) Represente el juego en forma extensiva y calcule el ENPS de este proceso de negociación.
b) ¿Qué acuerdo se alcanza, con qué pagos y en qué periodo?
c) Si el proceso de negociación lo iniciase Borja ¿quién saldría beneficiado en la negociación? ¿Qué acuerdo se alcanza, con qué pagos y en qué periodo?

a) Forma extensiva:



(5 puntos)
El ENPS es:
L2 acepta (A) si $8.000 - P_B \geq 0$, es decir, si $p_B \leq 8.000$; rechaza en caso contrario.
B2 ofrece $p_B = 8.000$.
B1 acepta (A) si $P_L - 3.000 \geq (8.000 - 3.000)$, es decir, si $p_L \geq 8.000$.
L1 ofrece $p_L = 8.000$.
(5 puntos)

b) El acuerdo se alcanza en la primera etapa de la negociación. Lorenzo (Comprador) ofrece $p_L = 8.000$ y Borja (Vendedor) acepta. Los pagos son $(8.000 - 8.000,\ 8.000 - 3.000) = (0, 5.000)$. Sale beneficiado Borja.
(5 puntos)

c) El acuerdo se alcanza en la primera etapa de la negociación. Borja (Vendedor) ofrece $p_B = 3.000$ y Lorenzo (Comprador) acepta. Los pagos son $(8.000 - 3.000, 3.000 - 3.000) = (5.000, 0)$. Sale beneficiado Lorenzo.
(5 puntos)

II.4 Dos empresas del mundo del automóvil deben decidir simultáneamente si sacar al mercado el día uno de enero de 2013, su nuevo vehículo eléctrico. La Empresa X obtendría unos beneficios anuales de 18 millones de euros en el caso de que sacara su vehículo al mercado y la Empresa Y decidiera no sacar el suyo. Por el contrario, si la Empresa Y sacara al mercado su vehículo eléctrico obtendría unos beneficios anuales de 15 millones de euros siempre que la Empresa X no lo hiciera. En ambos casos, la empresa que no decidiera sacar al mercado su vehículo eléctrico mientras que la competidora sí que decidiera hacerlo, obtendría un beneficio anual de 7 millones de euros. Si ambas sacan el vehículo eléctrico, los pagos para cada una serán de 8 millones de euros. Si ninguna de ellas sacara al mercado sus respectivos vehículos eléctricos sus beneficios ascenderían a 12 millones de euros anuales.

a) Si la decisión se llevara a cabo cada 1 de enero, de los siguientes tres años y sabiendo que cada año los beneficios de cada una de las decisiones a tomar se vieran incrementadas en un millón de euros anuales, indique cuál sería el ENPS y qué pagos obtendrían en dicho equilibrio.

Suponga ahora que la decisión que deben tomar las empresas se realiza cada primero de enero indefinidamente y que además no existe ninguna variación en los beneficios obtenidos en cada uno de los años.

b) ¿Podrían llegar ambas empresas a algún tipo de acuerdo de cooperación? Indique cuál.
c) Calcule el factor de descuento de cada una de las empresas para el cual estarían dispuestas a mantener el acuerdo de cooperación.
d) ¿Cuál sería el ENPS que sostendría dicho acuerdo, y qué pagos medios obtendrían en dicho equilibrio perfecto en subjuegos?

a) El juego estático cada etapa es:

1ª etapa	S	NS
S	8, 8	18, 7
NS	7, 15	12, 12

2ª etapa	S	NS
S	9, 9	19, 8
NS	8, 16	13, 13

3ª etapa	S	NS
S	10, 10	20, 9
NS	9, 17	14, 14

EN en cada juego estático: {(S, S)}. (1 puntos)

Al haber un único EN en cada juego estático, el único ENPS es la repetición del EN: (1 punto)
ENPS= {(Empresa X: (1ª et.: jugar S, 2ª et.: jugar S no importa lo que se jugó en la 1ª et., 3ª et.: jugar S no importa lo que se jugó en las anteriores), (Empresa Y: (1ª et.: jugar S, 2ª et.: jugar S no importa lo que se jugó en la 1ª et., 3ª et.: jugar S no importa lo que se jugó en las anteriores))}. (2 puntos)
Los pagos son: {(8+9+10 ; 8+9+10)}. (1 punto)

b) Sí. Podrían llegar a un acuerdo de cooperación en el que ambas no sacaran al mercado su vehículo eléctrico. Dicho acuerdo podría consistir en la "estrategia gatillo": $S_X = S_Y =$ (jugar NS en $t = 1$, jugar NS en $t > 1$ si se jugó (NS,NS) en todo $\tau < t$, jugar S en $t > 1$ si no se jugó (NS,NS) en algún $\tau < t$).
(5 puntos)

c) Resolviendo $u_x(S_X, S_Y) = \frac{12}{1-\delta_X} \geq 18 + \frac{8\delta_X}{1-\delta_X}$ encontramos $\delta_X \geq 3/5$ para que la Empresa X quiera mantener la cooperación. Análogamente para Y: $u_Y(S_X, S_Y) = \frac{12}{1-\delta_Y} \geq 15 + \frac{8\delta_Y}{1-\delta_Y}$ nos da $\delta_Y \geq 3/7$ para que la Empresa Y mantenga la cooperación. (5 puntos)

d) La estrategia "gatillo" (S_X, S_Y) descrita en b) con los factores de descuento obtenidos en c) es un ENPS que da pagos de 12 en cada periodo a cada empresa. (1 punto)
Constituye un EN del juego entero para $\delta_X \geq 3/5$ y $\delta_Y \geq 3/7$ tal como se ha calculado en c). Los pagos son, $u_x(S_X, S_Y) = \frac{12}{1-\frac{3}{5}} = 30$ y $u_Y(S_X, S_Y) = \frac{12}{1-\frac{3}{7}} = 21$. Vale también decir 12 de media por periodo (2 puntos).
Constituye un EN en los subjuegos en que se prescribe seguir jugando (NS,NS) por ser el juego idéntico al juego original y porque la estrategia "gatillo" (S_X, S_Y) prescribe lo mismo que en el juego original. (1 punto)
Constituye un EN en los subjuegos en que se prescribe jugar (S,S) para siempre por ser la repetición de EN del juego estático. (1 punto)

II.5 Dos empresas compiten *a la* Cournot. La function (inversa) de demanda es $p = 6 - Q$, donde p es el precio de mercado y Q es la cantidad total producida por las dos empresas. La Empresa 2 tiene un coste marginal $c_2 = 3$. La Empresa 1 tiene un coste marginal $c_A = \frac{4}{3}$ con probabilidad 2/3 y $c_A = \frac{10}{3}$ con probabilidad 1/3. La Empresa 1 sabe su propio coste, pero la Empresa 2 solo sabe que es c_A o c_B con las probabilidades anteriormente descritas.

a) Encuentre las funciones de reacción de la Empresa 1.
b) Encuentre la función de reacción de la Empresa 2.
c) Encuentre el equilibrio de Nash bayesiano.
d) Dibuje las funciones de reacción usando el hecho, observado en la function de reacción de la Empresa 2 vista en b) de que a la Empresa 2 reacciona ante la cantidad esperada de la Empresa 1.

a) La Empresa 1 puede ser del Tipo A (costes altos, $c_A = \frac{10}{3}$) o del Tipo B (costes bajos, $c_B = \frac{4}{3}$). La Tipo A resuelve:

$max_{q_A}(6 - q_A - q_2)q_A - \frac{10}{3}q_A$, de donde obtenemos la función de reacción: $q_A = \frac{6-q_2-\frac{10}{3}}{2}$.

Análogamente para la Tipo B:

$max_{q_B}(6 - q_B - q_2)q_B - \frac{10}{3}q_B$, de donde obtenemos la función de reacción: $q_B = \frac{6-q_2-\frac{4}{3}}{2}$.
(5 puntos)

b) La Empresa 2 resuelve:

$max_{q_2}\frac{2}{3}[(6 - q_A - q_2)q_2 - 3q_2] + \frac{1}{3}[(6 - q_B - q_2)q_2 - 3q_2]$, de donde obtenemos la función de reacción: $q_2 = \frac{6-(\frac{2}{3}q_B+\frac{1}{3}q_A)-3}{2}$.
(5 puntos)

c) Con las tres funciones de reacción encontramos el ENB: $\{((q_B = 2, q_A = 1), (q_2 = \frac{2}{3}))\}$. (5 puntos)

d) $E(q_1) = \frac{2}{3}q_B + \frac{1}{3}q_A = \frac{4-q_2}{2}$. De ahí: $q_2 = \frac{3-E(q_1)}{2}$.
Las funciones de reacción se pueden dibujar en con $E(q_1)$ y q_2 en los ejes. El punto de equilibrio se puede representar como $E = (E(q_1) = \frac{2}{3}2 + \frac{1}{3}1 = \frac{5}{3}, q_2 = \frac{2}{3})$. (5 puntos)