I	II.1	II.2	II.3	II.4	Total

Teoría de Juegos
Examen de diciembre de 2018

Nombre: **Grupo:**

Tiene dos horas y media para completar el examen. Sin calculadora.

I. Preguntas cortas (5 puntos cada una)

I.1 ¿Puede haber un juego estático en el que cada estrategia sea racionalizable? En caso afirmativo, muestre un ejemplo. En caso negativo, explique por qué.

Sí, p.e. pares y nones..

I.2 Represente en una tabla un juego del tipo "dilema del prisionero" y, en otra, un juego del tipo "batalla de los sexos".

Ver notas de clase.

I.3 En cualquier juego dinámico usar el criterio de inducción hacia atrás encuentra un equilibrio de Nash. Si es cierto, pruébelo, y si no lo es dé un contraejemplo.

No es correcto. En juegos con información imperfecta y asimétrica no podemos usar inducción hacia atrás.

I.4 En un juego hay dos equilibrios de Nash: (a, a) y (b, b). Si el juego se repite tres veces, muestre que jugar (a, a) durante el primer periodo, (b, b) durante el segundo en todos los subjuegos y (a, a) en el tercero, también en todos los subjuegos, es un ENPS.

En los subjuegos que empiezan en el tercer periodo, nadie se desvía, puesto que la estrategia prescribe un equilibrio de Nash en cada uno de ellos.

En los subjuegos que comienzan en el segundo periodo nadie se desvía en el segundo periodo, puesto que no mejora los pagos de ese segundo periodo (la estrategia prescribe un EN), y no afectará tampoco a los pagos del tercer periodo (en el tercer periodo la estrategia no depende de las acciones del periodo anterior).

En el juego entero el argumento es el mismo que el del párrafo anterior.

II. Problemas (20 puntos cada uno)

II.1 Dos gerentes de división, 1 y 2, pueden invertir sus esfuerzos para crear una relación de trabajo que beneficie a ambos, pero el esfuerzo conlleva un coste privado. En particular, la función de pagos para el gerente i ($i \in \{1,2\}$) derivado de los niveles de esfuerzo (e_i, e_j) $i \in \{1,2\}, j \neq i$) es:

$$v_i(e_i, e_j) = (a + e_j)e_i - e_i^2,$$

donde $a > 0$.

(a) (5 puntos) ¿Cuál es la correspondencia de mejor respuesta para cada gestor?
(b) (5 puntos) ¿Son los niveles de esfuerzo sustitutos o complementarios estratégicos?
(c) (5 puntos) Encuentre los equilibrios del juego.
(d) (5 puntos) ¿Es eficiente alguno de los equilibrios de Nash?

(a) $\frac{\partial v_i}{\partial e_i} = (a + e_j) - 2e_i = 0$, de donde $e_i = \frac{a+e_j}{2}$.

(b) Complementarios: $\frac{\partial e_i}{\partial e_j} = \frac{1}{2} > 0$.

(c) Resolviendo el sistema ($e_1 = \frac{a+e_2}{2}$, $e_2 = \frac{a+e_1}{2}$) encontramos $e_1 = e_2 = a$. $NE = \{(a, a)\}$.

(d) Solo hay un equilibrio en (c) y es ineficiente:

$v_i(a, a) = a^2$,

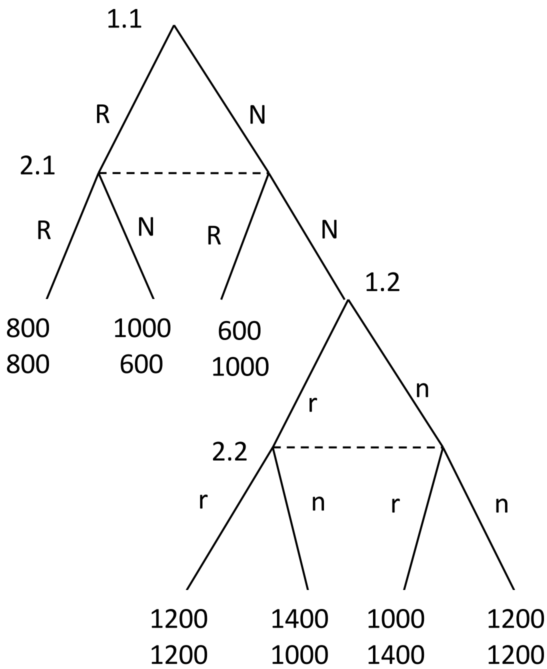
If $e_1 = e_2 = 2a$, ambos gerentes tienen mayor utilidad:

$v_i(2a, 2a) = 2a^2$.

II.2 Considere el siguiente juego entre dos inversores. Cada uno ha depositado 1000 euros en un fondo de inversiones gestionado por un banco. El banco ha invertido estos depósitos en proyectos de largo plazo que duran dos periodos. Si alguno de los inversores retira su dinero tras el primer periodo el banco se verá forzado a liquidar la inversión, de manera que solo se recuperarán 1600 euros, menos que el total invertido. Si el proyecto se completa, el retorno total será de 2400 euros, que se dividirá entre los inversores. Los inversores pueden retirar el dinero al final de solo uno de los periodos o no retirarlo. Las decisiones de retirar el dinero en cada estado se hacen de manera simultánea por los inversores. Si ambos retiran el dinero al final del periodo 1, cada uno recibirá 800 euros. Si uno retira al final del primer periodo y el otro no, el primero recibirá 1000 euros mientras que el otro recibirá 600. Si ambos retiran en el periodo 2, cada uno recibe 1200 euros. Si uno retira el dinero en el periodo 2 y el otro no lo retira, el primero tendrá 1400 euros mientras que el otro tendrá 1000. Si ninguno retira el dinero el banco les devolverá 1200 a cada uno.

(a) (5 puntos) Represente el juego en forma extensiva.
(b) (15 puntos) Encuentre los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos de este juego.

(a)



(b) El único EN del subjuego que comienza en 1.2 es (r, r) con pagos (1200, 1200). Reemplazando el subjuego por el pago encontramos los ENPS del juego entero:

$$ENPS = \{((R,r),(R,r)),((N,r),(N,r)),((1/2[R]+1/2[N],r),(1/2[R]+1/2[N],r))\}.$$

II.3 Las empresas 1 y 2 se enfrentan en un duopolio de Cournot. La demanda del mercado es $p = 220 - q_1 - q_2$, donde p es el precio de mercado y q_i es la cantidad producida por la Empresa *i*. El coste marginal de cada empresa es 40 y no hay costes fijos. Ese mercado se abre repetidamente con una probabilidad 8/9 en cada periodo de que el mercado vaya a un siguiente periodo (y una probabilidad 1/9 de que no se repita más). El factor de descuento es 9/10.

(a) (2 puntos) Encuentre el equilibrio de Cournot para el juego sin repetir.
(b) (2 puntos) Encuentre la cantidad de monopolio para el juego sin repetir.
(c) (2 puntos) Muestre que los beneficios son mayores si cada empresa produce la mitad de la cantidad de monopolio que en la situación en que producen la cantidad de Cournot.
(d) (4 puntos) Muestre la estrategia gatillo que sustenta el resultado de monopolio en el que cada empresa produce la mitad.
(e) (10 puntos) Muestre que la estrategia gatillo en (a) es un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

(a) Tras derivar la función de beneficios, las funciones de reacción son: $q_i = \frac{180-q_j}{2}$, lo que da $q_1^C = q_2^C = 60$.

(b) $q^M = 90$.

(c) $\Pi_i(45,45) = (220-45-45) \times 45 - 30 \times 45 = 4050$,
$\Pi_i(60,60) = (220-60-60) \times 60 - 30 \times 60 = 3600$.

(d) Periodo 1: Juega $q_i = 45$,
periodo $t > 1$: Juega $q_i = 45$ si en todos los periodos anteriores se jugó $q_1 = q_2 = 45$; si no, juega $q_i = 60$.

(e) Si se sigue la estrategia gatillo, los beneficios son:
$\Pi_i(Gatillo,\ Gatillo) = 4050 \times \frac{1}{1-\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}} = 4050 \times \frac{1}{0.2} = 20{,}250.$
Si se sigue la estrategia Cournot en cada periodo los beneficios son:
$\Pi_i(Cournot,\ Cournot) = 3600 \times \frac{1}{1-\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}} = 3600 \times \frac{1}{0.2} = 18{,}000.$
La mejor desviación en un solo periodo es producir $q_i = \frac{180-45}{2} = 67.5$, con beneficios en ese periodo $\Pi_i(67.5,45) = (220-67.5-45) \times 67.5 - 30 \times 67.5 = 4{,}556.25$.
Los beneficios Totales son:
$\Pi_i(Desviación,\ Gatillo) = 4{,}556.25 + 3600 \times \frac{\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}}{1-\frac{8}{9}\times\frac{9}{10}} = 4{,}556.25 + 14{,}400 = 18{,}956.25,$
menos que los obtenidos al seguir la estrategia gatillo.

Ahora podemos responder:

La estrategia gatillo es un EN en el juego entero: como hemos visto, la desviación en un solo periodo no es provechosa. Una desviación en un periodo posterior tras la primera desviación será una desviación del comportamiento de Cournot, que es un EN, lo que implica que no hay mejoras en el pago de ese periodo, y tampoco habrá mejoras en pagos futuros, porque estos no dependerán del pasado, puesto que en ellos se prescribe el comportamiento de Cournot de manera incondicional.

La estrategia gatillo es un EN en los subjuegos tras cooperación: Tanto el juego como la prescripción de la estrategia gatillo son los mismos que en el juego entero. El argumento anterior se aplica igual.

La estrategia gatillo es un EN en los subjuegos tras algún periodo de no cooperación: la estrategia gatillo prescribe jugar en cada periodo de estos subjuegos un EN de manera incondicional, por lo que está prescribiendo un EN en el subjuego (de hecho está prescribiendo un ENPS).

II.4 Considere los siguientes juegos en forma normal:

(a)

		Jugador 2	
		A	B
Jugador 1	C	1, 2	0, 0
	D	0, 0	2, 1

(b)

		Jugador 2	
		A	B
Jugador 1	C	0, 1	0, 0
	D	0, 0	2, 2

El Jugador 1 es informado de cuál de los dos juegos es el que se juega. El Jugador 2 solo sabe que el juego (a) se juega con probabilidad $0 \leq p \leq 1$ y que el juego (b) se juega con probabilidad $1\text{-}p$. Todo esto es de conocimiento común.

(a) (5 puntos) Describa la situación como un juego bayesiano.
(b) (15 puntos) Encuentre el equilibrio bayesiano en estrategias puras cuando $0<p<1/2$. (Recibirá solo 7 puntos si resuelve esta cuestión para un valor específico de p dentro de este rango).

(a) $N = \{1,2\}$
$T_1 = \{t_a, t_b\}, T_2 = \{2\}$.
$(p(2|t_a) = 1), (p(2|t_b) = 1), (p(t_a|2) = p, p(t_b|2) = 1 - p)$.
$A_{t_a} = \{C, D\}, A_{t_b} = \{C, D\}, A_2 = \{A, B\}$.
$S_1 = \{CC, CD, DC, DD\}, S_2 = \{A, B\}$.
Las utilidades son las mostradas en los juegos (a) and (b).

(b) Considere el juego con los valores esperados para el Jugador 2:

		Jugador 2	
		A	B
Jugador 1	CC	$\underline{p}$, $\underline{1+p}$	0, 0
	CD	$\underline{p}$, 2p	$2(1-p)$, $\underline{2(1-p)}$
	DC	0, $\underline{1-p}$	2p, p
	DD	0, 0	$\underline{2}$, $\underline{2(1-p)}$

Si $0 < p < 1/2$ tenemos que $2p < 2(1 - p)$ y $1 - p > p$. Las mejores respuestas están marcadas en el juego. Los ENB son (CC, A), y (DD, B).