Teoría de Juegos
Examen de junio de 2014

Nombre: Grupo:

Tiene dos horas y media para completar el examen.

I. Preguntas cortas (20 puntos).

I.1 Dé un ejemplo en el que un equilibrio de Nash ocurre en estrategias débilmente dominadas. ¿Podría darse un ejemplo parecido si las estrategias estuvieran fuertemente dominadas?

I.2 ¿La inducción para atrás es un caso especial de la perfección en subjuegos? ¿O es al revés?

I.3 Sean s y s' dos equilibrios de Nash de un juego estático G. Si G se repite T veces, jugar s los periodos pares y s' los impares será un equilibrio perfecto en subjuegos. ¿Verdadero o falso?

I.4 Defina los elementos de un juego bayesiano.

II. Problemas. Debe contestar cuatro de los siguientes problemas. (20 puntos cada uno).

II.1 Dos estudiantes de la Carlos III (Ana y Juan) tienen que prepararse para un examen extraordinario en el que quien saque mejor nota se llevará un premio valorado en 100€. El perdedor se queda sin nada. El Jugador *i* (*i*=Ana, Juan) puede realizar un esfuerzo e_i, medido en horas de estudio. Supongamos que la probabilidad p_i de que el Jugador *i* alcance el premio iguala la fracción de su esfuerzo con respecto al esfuerzo total. El coste de cada hora de esfuerzo es de 10€. Si ambos estudiantes maximizan la ganancia esperada, que para el Jugador *i* es $G_i = 100p_i - 10e_i$, calcule el esfuerzo en el equilibrio de Nash.

$\max_{e_i} G_i = 100\frac{e_i}{e_i+e_j} - 10e_i$

CPO: $100\frac{e_j}{(e_i+e_j)^2} - 10 = 0$

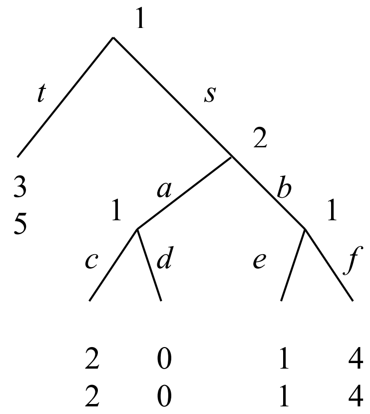
Para *j* se obtiene una expresión similar.

Por simetría: $e_i = e_j$, y se obtiene: $e_i = e_j = 2{,}5$.

La CSO es: $-\left(e_i + e_j\right) < 0$, por lo que efectivamente estamos ante un máximo.

II.2 Considere el juego representado a continuación.

(a) Encuentre los equilibrios perfectos en subjuegos. (4 puntos)

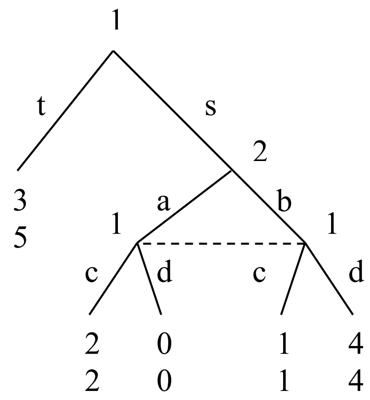


Suponga ahora que el Jugador 1 no sabe si el Jugador 2 ha elegido *a* o *b*.

(b) Representa gráficamente el nuevo juego. ¿Cuál es el conjunto de estrategias de cada jugador? (4 puntos)
(c) Calcule los equilibrios de Nash del subjuego que comienza cuando el Jugador 2 debe elegir entre *a* y *b*. (6 puntos)
(d) Encuentre los equilibrios perfectos en subjuegos del juego completo. (6 puntos)

(a) EPS = {((s,c,f), (b))}

(b)



Estrategias de 1 = {(t,c), (t,d), (s,c), (s,d)}
Estrategias de 2 = {a,b}

(c) EN = {(a,c), (b,d), (($\frac{3}{5}$[a]+$\frac{2}{5}$[b]), ($\frac{4}{5}$[c]+$\frac{1}{5}$[d]))}

(d) EPS = {(t, (a,c)), (s, (b,d)), (t, (($\frac{3}{5}$[a]+$\frac{2}{5}$[b]), ($\frac{4}{5}$[c]+$\frac{1}{5}$[d])))}

II.3 Dos empresas compiten en un mercado con bienes diferenciados seleccionando sus precios. La demanda de la Empresa *i* está dada por $q_i(p_i, p_j) = 20 - \frac{4}{3}p_i + \frac{2}{3}p_j, i, j = 1,2, i \neq j$, y su coste, por $C(q_i) = 5q_i$. Suponga primero que ambas empresas eligen sus precios simultáneamente.

(a) Encuentre las funciones de reacción de las empresas y muéstrelas en un gráfico. Encuentre los precios en el único equilibrio de Nash. Encuentre también los beneficios en el equilibrio. (8 puntos)

Suponga ahora que la Empresa 1 elige primero su precio y que la Empresa 2, después de observar el precio de su rival, elige el suyo.

(b) Represente el nuevo juego en su forma extensiva. Indique los conjuntos de información de cada empresa. (4 puntos)

(c) Encuentre el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos y los beneficios. (8 puntos)

(a) $\max_{p_i}(p_i - 5)(20 - \frac{4}{3}p_i + \frac{2}{3}p_j)$

CPO: $\left(20 - \frac{4}{3}p_i + \frac{2}{3}p_j\right) + (p_i - 5)\left(-\frac{4}{3}\right) = 0,$

Despejando se obtiene la función de reacción de *i*: $p_i = \frac{40+p_j}{4}$.

Para *j* se procede de manera similar

Por simetría: $p_i = p_j = \frac{40}{3}$,

de ahí: NE = $\{(\frac{40}{3}, \frac{40}{3})\}$.

(c) $\max_{p_1}(p_1 - 5)(20 - \frac{4}{3}p_1 + \frac{2}{3}p_2)$

s.a: $p_2 = \frac{40+p_1}{4}$

i.e.: $\max_{p_1}(p_1 - 5)(20 - \frac{4}{3}p_1 + \frac{2}{3}\frac{40+p_1}{4}) = (p_1 - 5)(\frac{160-7p_1}{6})$

CPO: $p_1 = \frac{195}{14} = 13{,}928$

$p_2 = \frac{40+13{,}928}{4} = 13{,}482$

II.4 Sea el siguiente juego estático de 2 jugadores donde Jugador 1 tiene estrategias *a* y *b* y Jugador 2 estrategias *x* e *y*, definido por la siguiente matriz de pagos:

	x	*y*
a	4, 3	0, 4
b	5, 0	1, 1

Considere que las decisiones se toman una vez al mes y el juego dura 2 meses.

(a) ¿Cuántos conjuntos de información tiene cada jugador?¿de cuantas estrategias dispone cada jugador?¿Cuantos subjuegos hay? (2 puntos)
(b) ¿Cuál será el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos (ENPS) del juego? Indique los pagos que reciben los jugadores en dicho ENPS. (4 puntos)

Considere ahora que el juego tiene una duración indefinida y que ambos jugadores tienen el mismo factor de descuento δ.

(c) ¿Cuál es el factor de descuento δ más pequeño que puede sostener (a, x) en un equilibrio perfecto en subjuegos usando estrategias "gatillo"? (14 puntos)

(a) Cada jugador tiene 5 conjuntos de información (en la etapa 1 un conjunto de información y en la etapa 2, 4 conjuntos de información). Al tener 2 posibles acciones en cada conjunto de información, el numero total de estrategias de cada jugador será $2^5 = 32$. El número de subjuegos propios es 4 (si se incluye el total serían 5).

(b) En el juego estático existe un único EN, (*b*,*y*), con pagos (1,1). El único ENPS cuando el juego se repite un número finito de veces sería jugar en cada etapa el único EN del juego. Es decir el ENPS sería (*bbbbb*, *yyyyy*) y los pagos que obtendrían serían (2,2).

(c) d) Si queremos que J1 juegue *a* y no se desvie a jugar *b*, tendrá que ocurrir que:

$$4 + 4\delta + 4\delta^2 + 4\delta^3 + \cdots \geq 5 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots$$

De esa desigualdad se deduce $\delta \geq \frac{1}{4}$.

Si queremos que J2 juegue *x* y no se desvíe a jugar *y*, tendrá que ocurrir que:

$$3 + 3\delta + 3\delta^2 + 3\delta^3 + \cdots \geq 4 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots$$

De esa desigualdad se deduce $\delta \geq \frac{1}{3}$.

Por tanto el factor de descuento más pequeño que lo garantiza sería $\delta = \frac{1}{3}$.

II.5 La empresa *Habla Más Telecom* desea renovar su red de antenas de telefonía móvil y propone otorgar el contrato en una subasta inversa a dos empresas fabricantes de antenas, *Soluciones Sin Cables*, SSC, y *Telecomunicaciones Sin Alambres*, TSA. Esta subasta se realiza de acuerdo con las siguientes reglas:

- Cada empresa puede pujar 1.200 o 900 unidades monetarias por antena.
- El jugador que haya pujado la cantidad menor se lleva el contrato, y en caso de empate, se decide a cara o cruz quién se lo lleva.
- El ganador cobrará por cada antena la cantidad que ha pujado.

Los dos jugadores saben que TSA tiene un coste unitario de producción de antenas de 700. Se sabe también que SSC puede tener un coste unitario de 600 unidades monetarias con probabilidad 1/2 y de 1.000 con probabilidad 1/2 y que SSC sabe cuáles son, pero no así TSA.

(a) Describa esta situación como un juego bayesiano. Es decir, determine el conjunto de jugadores y de tipos por cada jugador, determine también las creencias de cada tipo sobre los tipos de los demás, el conjunto de estrategias de los tipos y las funciones de utilidad en la típica forma matricial. (5 puntos)

(b) Calcule los equilibrios Bayesianos de Nash de este juego. (15 puntos)

(a) Jugadores = {SSC, TSA}

Tipos de SSC = {SSC_{600}, SSC_{1000}}, tipos de TSA = {TSA}

Probabilidades: $p(\text{SSC}_{600} / \text{TSA})=\frac{1}{2}$, $p(\text{SSC}_{1000} / \text{TSA})=\frac{1}{2}$; $p(\text{TSA}/\text{SSC}_{600})=1$; $p(\text{TSA}/\text{SSC}_{1000})=1$.

Estrategias de SSC = {(1200, 1200), (1200, 900), (900, 1200), (900, 900)}.

Estrategias de TSA = {1200, 900}.

Pagos:

(SSC_{600})		TSA 1200	TSA 900
SSC	1200	300, 250	0, 200
	900	300, 0	150, 100

(SSC_{1000})		TSA 1200	TSA 900
SSC	1200	100, 250	0, 200
	900	-100, 0	-50, 100

(b) SSC_{1000} pujará 1200 (domina a 600).

ENB = {((1200, 1200), (1200)), (900, 1200), (900))}.