Teoria de los juegos: Ejercicios Adicionales

Problema 1. Considere el siguiente escenario. Los jugadores 1 y 2 compiten en una subasta para obtener un objeto valioso, por ejemplo una pintura. Cada jugador escribe en un sobre cerrado su oferta o apuesta, sin conocer la apuesta del otro jugador. Las apuestas comienzan desde 0, son números múltiplos de \$100 y el máximo que se puede apostar es de \$500. El objeto es valorado en \$400 por el jugador 1 y en \$300 por el jugador 2. El jugador que hace la oferta mayor gana la subasta. En caso de empate, suponga que el jugador 1 se lleva el objeto. El ganador paga un precio P que especificaremos debajo. Así, se el valor del objeto es de v_i para el jugador $i = 1, 2$ y es el jugador i el que gana el objeto su pago o utilidad es $v_i - P$ y el pago o utilidad del perdedor es igual a cero.

Consideremos los siguientes dos casos:

(i) Subasta de Primer Precio: el ganador paga un precio P igual a la apuesta que hace.

(ii) Subasta de Segundo Precio: el ganador paga un precio P igual a la apuesta del jugador que perdió.

Responda a las siguientes preguntas para ambos casos:

Escriba ambos juegos en forma estratégica.

¿Cuales son los perfiles de estrategias racionalizables?

Encuentre los equilibrios de Nash en estrategias puras.

Problema 2. Considere la siguiente variante del juego de Cournot. La función de demanda inversa de mercado es

$$p(q_1, q_2) = 2 - q_1 - q_2$$

y el coste por unidad es $c = 1$ para ambas empresas que, como es usual, escogen simultáneamente q_1 y q_2 para maximizar sus pagos dados por

$$U_i(q_1, q_2) = (1 - \alpha)\, \pi_i + \alpha q_i$$

donde π_i son los beneficios de la empresa $i = 1, 2$. Encuentre el equilibrio de Nash en estrategias puras.

Problema 3. Considere los siguientes juegos en formal normal (para el segundo de ellos asuma que $0 < c < 1$):

	H	D
H	$0, 0$	$6, 1$
D	$1, 6$	$3, 3$

	S	W
S	$0, 0$	$0, -c$
W	$-c, 0$	$1 - c, 1 - c$

	L	M	R
U	$1, 3$	$0, 0$	$2, -1$
M	$1, 0$	$4, 2$	$0, -2$
D	$0, 1$	$0, 1$	$0, 0$

Encontrar los equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas de los tres juegos.

Problema 4. El siguiente juego de etapa es repetido dos veces.

	L	M	R
L	$1,1$	$5,0$	$1,0$
M	$0,5$	$4,4$	$0,0$
R	$0,1$	$0,0$	$3,3$

¿Cuál de los perfiles *simétricos* de estrategias que se detallan debajo forman un equilibrio de Nash? ¿Cuál de ellos es equilibrio de Nash perfecto en subjuegos? Explique.

(i) Se juega M en el período 1; si (M, M) es jugado en el primer período, se juega R en el segundo período. En cualquier otro caso, juegue L.

(ii) Se juega M en el período 1; si el oponente juega M en el primer período, juegue R en el segundo período. En cualquier otro caso, juegue L.

(iii) Se juega M en el período 1. Si cualquier jugador juega M en el primer período, juegue R en el segundo período. Si ambos jugadores escogen L o R en el primer período, juegue L en el segundo período.

Problema 5. Dos personas están involucradas en una disputa. La persona 1 no conoce si la persona 2 es débil o fuerte y cree que es fuerte con probabilidad igual a α. La persona 2 sin embargo está perfectamente informada acerca de las características de la persona 1. Cada individuo puede escoger entre 'luchar' o 'rendirse'. Rendirse da un pago de cero, independientemente de lo que haga el adversario; mientras que luchar da un pago de 1 si y sólo si el oponente se rinde. Si ambas personas luchan, los pagos son de $(-1, 1)$ si la persona 2 es fuerte, y de $(1, -1)$ si la persona 2 es débil.

Formule la situación como un juego bayesiano y encuentre todos los equilibrios Bayesianos de Nash cuando $\alpha < 1/2$ y cuando $\alpha > 1/2$.

Problema 6. María está decidiendo si se queda en casa o llama a su novio. Si se queda en casa ella y su novio reciben un pago de 2. Si llama al novio comenzará un proceso decisor sobre que película ir a ver, que se conoce como la Batalla de los Sexos, y cuya forma normal es

	Kill Bill	The Pursuit of Happyness
Kill Bill	$1,3$	$0,0$
The Pursuit of Happyness	$0,0$	$3,1$

María escoge filas. Representa el juego completo (incluyendo la decisión de llamar), en forma extensiva y en forma normal, y encuentra todos sus equilibrios de Nash (en estrategias puras) y perfectos en subjuegos (en puras y mixtas).

Problema 7. Dos jugadores deben repartirse 10 euros. El jugador 1 realiza una propuesta para la división en números *enteros*. Es decir, puede proponer cualquier número entero entre 0 y 10. El jugador 2 puede aceptar o rechazar la propuesta. Si acepta, los 10 euros son divididos de acuerdo al reparto propuesto, y si rechaza ambos obtienen cero. Sea m_i el dinero que se asigna al jugador $i = 1, 2$ en la propuesta de división. Suponga que la utilidad del jugador i es: $m_i - cm_{-i}$ para $0 \leq c < 1$.

(i) Dibuje la forma extensiva del juego.

(ii) Encuentre el/los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos para $c = 0$, para $c = 0.25$ y para $c = 0.5$.

(iii) ¿Como depende la solución de c?

Problema 8. Considere el siguiente juego bayesiano. El tipo del jugador columna es conocido pero el jugador fila puede ser de tipo 1 (con probabilidad 0.9) o de tipo 2. Por supuesto el jugador fila conoce su tipo pero el columna no lo sabe. Si el tipo del jugador fila es el 1, la matriz de pagos es como la que sigue a continuación

	L	R
U	$2, 2$	$-2, 0$
D	$0, -2$	$0, 0$

Si en cambio es de tipo 2, la matriz de pagos es

	L	R
U	$0, 2$	$1, 0$
D	$1, -2$	$2, 0$

(i) Describa todas las estrategias puras para ambos jugadores.

(ii) Encuentre todos los equilibrios Bayesianos de Nash en estrategias puras.

Problema 9. La función de ingresos totales de una empresa depende del número de trabajadores que contrate. Un gremio que representa a los trabajadores le hace una oferta a la empresa de un salario $w \in [0, +\infty)$. La empresa, tras observar el salario propuesto, decide si lo acepta o lo rechaza. Si la empresa acepta la oferta, ésta escoge luego el número de trabajadores L que empleará. Si la rechaza, no emplea a nadie y los ingresos de la empresa son iguales a cero. La función de pagos o beneficios de la empresa es

$$\pi(w, L) = IT(L) - wL,$$

donde

$$IT(L) = L^{1/2}.$$

La función de pagos del gremio esta dada por

$$u(w, L) = (w - 1)L$$

Ambas funciones de pago toman el valor cero si la empresa rechaza la propuesta salarial. Encuentre el o los equilibrios perfectos en subjuegos en estrategias puras.

Problema 10. Dos individuos están involucrados en una relación con sinergias positivas: si ambos ponen más esfuerzo en su relación, ambos están mejor. Seamos más específicos, un nivel de esfuerzo es un número no negativo y la función de pago del jugador 1 es $e_1 (1 + e_2 - e_1)$ donde e_i es el esfuerzo del jugador $i = 1, 2$. Para el jugador 2, el coste del esfuerzo es: (i) o el mismo que para el jugador 1 y por lo tanto su función de pago está dada por $e_2 (1 + e_1 - e_2)$; o (ii) es muy costoso ejercer esfuerzo para el, en cuyo caso su función de pago es $e_2 (1 + e_1 - 2e_2)$.

El jugador 2 conoce su función de pagos (y por lo tanto si su coste del esfuerzo es de 1 o 2) y también conoce la función de pagos del jugador 1. Este último sin embargo no conoce el coste del esfuerzo para el jugador 2. El cree que el jugador 2 tiene un coste de esfuerzo que es bajo (es decir de 1) con probabilidad igual a $p \in (0, 1)$. Encuentre todos los equilibrios Bayesianos de Nash en estrategias puras en función de p.

Problema 11. Un ladrón (L) ha visto una posible víctima y esta decidiendo si va a atacar (A) o si va a pasar (P). Si ataca, la víctima (V) tiene que decidir si va a defenderse (D) o a rendirse (R). Si no ataca, ambos jugadores tienen un pago de cero. Si el ataca y la víctima se rinde, el ladrón obtiene una cantidad de v euros de la víctima; pero si esta se defiende obtiene solo $v/2$ euros de la víctima. Cuando la víctima se defiende se produce una violenta disputa y ambos, el ladrón y la víctima, sufren un coste por la pelea (daños, etc) que denominamos c. Asuma que $c > v/2$.

(i) Encuentre todos los equilibrios de Nash en estrategias puras.

(ii) Encuentre todos los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos en estrategias puras.

Considere ahora la versión repetida de este juego con un factor de descuento para ambos jugadores.

(iii) Encuentre el o los equilibrios perfectos en subjuego si el juego se repite un número T finito de veces y $\delta = 1$.

(iv) Considere ahora que el juego se repite un número $T = \infty$ de veces y que $\delta \in (0, 1)$. Compruebe si existen condiciones bajo las cuales las siguientes estrategias forman un subjuego perfecto

- *Ladrón*: Empieza jugando P y seguirá haciéndolo a menos que en el pasado se haya producido el resultado (A, R), en cuyo caso jugará A.
- *Víctima*: En el caso de que un ataque ocurra va a jugar R si en el pasado se ha producido el resultado (A, R). En otro caso, la víctima escogerá D.

Problema 12. Considere un mercado con función inversa de demanda $P(Q) = 100 - 2Q$ (donde Q es la cantida agregada producida en la industria) en el que operan dos empresas, 1 y 2, que compiten eligiendo la cantidad a producir. Por razones históricas la empresa 1 es reconocida por todos como el líder en la industria, de forma que la empresa 2 elige su cantidad a producir despues de observar la decisión de la empresa 1. Las funciones de costes de ambas empresas son: para 1 $C(q_1) = 4q_1$ y para 2 $C(q_2) = 2q_2$.

i) Encontrar el Equilibrio de Nash Perfecto en Subjuegos (ENPS) de este juego.

ii) ¿Desearía la empresa 1 abandonar su condición de líder en esta industria y competir simultáneamente con la empresa 2? (Justifique su respuesta comparando los beneficios en uno y otro caso).

iii) Suponga ahora que las empresas 1 y 2 se enfrentan a la amenaza de entrada de otra empresa, la empresa 3, que tiene la siguiente estructura de costes: $C(q_3) = q_3$. En caso de entrar, la empresa 3 se convertiría en un seguidor, compitiendo simultáneamente con la empresa 2 después de que ambas observen la cantidad de la empresa 1. Encontrar el nuevo ENPS. ¿Cuál es la máxima cantidad que estaría dispuesta a pagar la empresa 3 a la empresa 1 por intercambiar sus posiciones (es decir, para que 3 fuese el nuevo líder y 1 se convirtiese en seguidor)? ¿Aceptaría la empresa 1 esa cantidad?

Problema 13. Considere los siguientes juegos de etapa. Encuentre, si es posible, estrategias para los jugadores y condiciones para el factor de descuento $\delta \in (0,1)$ para sostener el perfil de estrategias (U, L) como equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

$$\begin{bmatrix} & L & R \\ U & 2,2 & 0,4 \\ D & 4,0 & 1,1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} & L & R \\ U & 3,4 & 0,7 \\ D & 5,0 & 1,2 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} & L & R \\ U & 3,2 & 0,1 \\ D & 7,0 & 2,1 \end{bmatrix}$$

Problema 14. Tres compañeros de piso, A, B y C están discutiendo acerca de la división de una pizza cuyo tamaño normalizamos a 1. Al final, A que ha estudiado teoría de los juego propone el siguiente protocolo:

Etapa 1:

i. A corta la pizza en dos partes.

ii. B escoge una de las dos partes y A se come la parte de la pizza que B *no* ha escogido.

Etapa 2:

i. B corta la parte restante de pizza en dos partes.

ii. C escoge una de las dos partes y B se come la parte de la pizza que C *no* ha escogido.

Etapa 3:

i. C se come lo que queda de la pizza.

Denotemos con a, b y c a la fracción de pizza que han comido A, B y C respectivamente. Dado nada de pizza ha quedado: $a + b + c = 1$. Los pagos de los jugadores son simplemente la fracción de pizza que consiguen comer y el factor de descuento es igual a uno para todos ellos. Responda:

(i) Suponga que al comienzo de la etapa 2 todavía hay $4/5$ de la pizza. ¿Cómo debe B cortar la pizza?

(ii) Un poco más general: suponga que A ha comido a, dejando $1 - a$ para el comienzo de la etapa 2. ¿Cómo debe B cortar la pizza?

(iii) Derive la fracción de pizza que cada jugador come en equilibrio usando inducción hacia atrás.

Problema 15. A y B están considerando realizar una sociedad conjunta (Joint Venture, JV) que les reportaría un beneficio de 100 euros. Si no trabajan juntos, la JV no se puede llevar a cabo dado que sus ideas son únicas y complementarias. Si la JV no se realiza, cada uno de ellos tiene distintas alternativas laborales. A puede trabajar con su primo y ganar 20 euros mientras que B tiene una oferta laboral que le reportará una ganancia de 40 euros. Antes de decidir si llevan a cabo o no la JV deben acordar como repartirse los beneficios futuros de 100 euros. Ambos tienen un factor de descuento igual a 0.9. Responda:

(i) Suponga que B realiza una oferta de división de los beneficios a A. Luego A debe decidir si acepta la oferta de B o la rechaza y se marcha a trabajar con su primo. Recuerde que si A rechaza, la JV no se realiza ¿Que división debería proponer B? Escriba las estrategias que constituyen el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

(ii) Suponga ahora que hay dos etapas o períodos. En la primera B realiza una petición de los beneficios que pretende apropiarse. Ahora A tiene tres opciones: (1) aceptar; (2) romper la relación (en cuyo caso ambos pasan a conseguir sus trabajos antes descriptos); o (3) continuar negociando. Cuando A decide continuar negociando, la segunda etapa comienza, A realiza la petición y es B quien decide ya sea: (1) aceptar, o (2) romper la relación.

(i) Dibuje la forma extensiva del juego de manera cuidadosa.

(ii) Encuentre el equilibrio de Nash perfecto en subjuegos.

Problema 16. Considere el siguiente juego simultáneo entre los jugadores 1 (escoge las filas de la matriz) y 2:

$$\begin{array}{ccc} & C & D \\ C & 2,3 & c,d \\ D & a,b & 1,1 \end{array}$$

donde a, b, c, d son números reales.

(i) En que intervalos deben estar a, b, c, d para que C sea una estrategia estrictamente dominada para ambos jugadores. En tal caso ¿cual sería el equilibrio de Nash?

(ii) En que intervalos deben estar a, b, c, d para que existan los dos siguientes equilibrios de Nash en estrategias puras: (C, D) y (D, C). Asuma que a, b, c, d toman alguno de esos valores. Compruebe si existe algún equilibrio de Nash en estrategias mixtas.

(iii) ¿En que intervalos deberían estar a, b, c, d para que existiera un único equilibrio de Nash en estrategias puras igual a (C, C)?

(iv) Encuentre condiciones sobre los valores de a, b, c, d para que todos los perfiles de estrategias $(C, C), (C, D), (D, C), (D, D)$ sean equilibrio de Nash?