

Juegos Bayesianos

2. Aplicaciones Económicas

Universidad Carlos III de Madrid

Aplicaciones económicas

- Subastas con información asimétrica sobre las **valoraciones**:
 - Subastas al **primer** precio.
 - Subastas al **segundo** precio.
- Duopolio de Cournot con información asimétrica sobre:
 - Los **costes** del rival.
 - La **demanda**.
- Bienes públicos con información asimétrica sobre la **valoración** o los **costes** del rival.

Subastas

- Dos personas participan en una subasta a sobre cerrado para comprar un objeto.
- Deben elegir simultáneamente sus pujas b_1 y b_2 y el objeto se **vende** a quien realice la puja más alta. En caso de empate el ganador se decide a suertes.
- Las valoraciones son v_1 y v_2 .
- La utilidad del Jugador i es

$$u_i(b_1, b_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - p & \text{si } b_i > b_j \\ \frac{v_i - p}{2} & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

donde **p** dependerá del tipo de subasta que se utilice.

Subasta al primer precio

- El individuo que realiza la mayor puja gana el objeto. **Paga su propia puja.**
- **Jugadores:** compradores 1 y 2.
- **Acciones** posibles: $b_i \in [0, \infty)$, $i = 1, 2$.
- **Tipos:** cada comprador tiene una valoración v_i que puede ser información privada.
- **Utilidad** del Jugador i :

$$u_i(b_1, b_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{si } b_i > b_j \\ \frac{v_i - b_i}{2} & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

Subasta al primer precio

Veamos un ejemplo simplificado de subasta al primer precio:

- El Comprador 1 puede ser de **dos tipos** con igual probabilidad, uno valora el bien en 60 y el otro en 100.
- El Comprador 2 solo puede ser de **un tipo**, que valora el bien en 60.
- Solo se puede pujar 40, 60 o 80.
- No consideraremos equilibrios en estrategias débilmente dominadas.

Subasta al primer precio

$v_1 = 60$, prob = 0,5

		Jugador 2		
		$b_2 = 40$	$b_2 = 60$	$b_2 = 80$
Jugador 1.60	$b_1 = 40$	10, 10	0, 0	0, -20
	$b_1 = 60$	0, 0	0, 0	0, 20
	$b_1 = 80$	-20, 0	-20, 0	-10, -10

$v_1 = 100$, prob = 0,5

		Jugador 2		
		$b_2 = 40$	$b_2 = 60$	$b_2 = 80$
Jugador 1.100	$b_1 = 40$	30, 10	0, 0	0, -20
	$b_1 = 60$	40, 0	20, 0	0, -20
	$b_1 = 80$	20, 0	20, 0	10, -10

Eliminamos estrategias débilmente dominadas para 1.60 y 1.100.

Subasta al primer precio

$v_1 = 60$, prob = 0,5

		Jugador 2		
		$b_2 = 40$	$b_2 = 60$	$b_2 = 80$
Jugador 1.60	$b_1 = 40$	10, 10	0, 0	0, -20
	$b_1 = 60$	0, 0	0, 0	0, -20
	$b_1 = 80$	-20, 0	-20, 0	-10, -10

$v_1 = 100$, prob = 0,5

		Jugador 2		
		$b_2 = 40$	$b_2 = 60$	$b_2 = 80$
Jugador 1.100	$b_1 = 40$	30, 10	0, 0	0, -20
	$b_1 = 60$	40, 0	20, 0	0, -20
	$b_1 = 80$	20, 0	20, 0	10, -10

Eliminamos estrategias débilmente dominadas para 2.

Subasta al primer precio

- Eliminación de estrategias débilmente dominadas para el Tipo $v_1 = 60$: $b_1 = 60$ y $b_1 = 80$ están débilmente dominadas por $b_1 = 40$.
- Eliminación de estrategias débilmente dominadas para el Tipo $v_1 = 100$: $b_1 = 40$ está débilmente dominada por $b_1 = 60$.
- Eliminación de estrategias débilmente dominadas para el Jugador 2: $b_2 = 60$ y $b_2 = 80$ están débilmente dominadas por $b_2 = 40$.

Subasta al primer precio

Tras la primera ronda de eliminación de estrategias débilmente dominadas obtenemos:

$$v_1 = 60, \text{ prob} = 0,5$$

Jugador 2

$$b_2 = 40$$

Jugador 1.60

$$b_1 = 40$$

10, 10

$$v_1 = 100, \text{ prob} = 0,5$$

Jugador 2

$$b_2 = 40$$

Jugador 1.100

$$b_1 = 60$$

40, 0

~~$$b_1 = 80$$~~

20, 0

- Ahora $b_1 = 80$ está débilmente dominada para 1.100.
- Nos queda una acción para cada tipo, que será el **equilibrio de Nash bayesiano**: ((40, 60), 40).
- **Pagos** de equilibrio: el Jugador 1 obtiene $0,5 \times 40 + 0,5 \times 10 = 25$, el Jugador 2 obtiene $0,5 \times 10 + 0,5 \times 0 = 5$.
- Los **ingresos esperados del subastador** son $0,5 \times 40 + 0,5 \times 60 = 50$.

Subasta al segundo precio

- El individuo que realiza la mayor puja gana el objeto. Paga la segunda puja más alta.
- **Jugadores**: compradores 1 y 2.
- **Acciones** posibles: $b_i \in [0, \infty)$, $i = 1, 2$.
- **Tipos**: cada comprador tiene una valoración v_i , que puede ser información privada.
- **Utilidad** del Jugador i :

$$u_i(b_1, b_2; v_1, v_2) = \begin{cases} v_i - b_j & \text{si } b_i > b_j \\ \frac{v_i - b_j}{2} & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

Subasta al segundo precio

$v_1 = 60$, prob = 0,5

		Jugador 2		
		$b_2 = 40$	$b_2 = 60$	$b_2 = 80$
Jugador 1.60	$b_1 = 40$	10, 10	0, 20	0, 20
	$b_1 = 60$	20, 0	0, 0	0, 0
	$b_1 = 80$	20, 0	0, 0	-10, -10

$v_1 = 100$, prob = 0,5

		Jugador 2		
		$b_2 = 40$	$b_2 = 60$	$b_2 = 80$
Jugador 1.100	$b_1 = 40$	30, 10	0, 20	0, 20
	$b_1 = 60$	60, 0	20, 0	0, 0
	$b_1 = 80$	60, 0	40, 0	10, -10

Eliminamos estrategias débilmente dominadas para 1.60 y 1.100.

Subasta al segundo precio

$v_1 = 60$, prob = 0,5

		Jugador 2		
		$b_2 = 40$	$b_2 = 60$	$b_2 = 80$
Jugador 1.60	$b_1 = 40$	10, 10	0, 20	0, 20
	$b_1 = 60$	20, 0	0, 0	0, 0
	$b_1 = 80$	20, 0	0, 0	-10, -10

$v_1 = 100$, prob = 0,5

		Jugador 2		
		$b_2 = 40$	$b_2 = 60$	$b_2 = 80$
Jugador 1.100	$b_1 = 40$	30, 10	0, 20	0, 20
	$b_1 = 60$	60, 0	20, 0	0, 0
	$b_1 = 80$	60, 0	40, 0	10, -10

Eliminamos estrategias débilmente dominadas para 2.

Subasta al segundo precio

- Eliminación de estrategias débilmente dominadas para el Tipo $v_1 = 60$: $b_1 = 40$ y $b_1 = 80$ están débilmente dominadas por $b_1 = 60$.
- Eliminación de estrategias débilmente dominadas para Tipo $v_1 = 100$: $b_1 = 40$ y $b_1 = 60$ está débilmente dominada por $b_1 = 80$.
- Eliminación de estrategias débilmente dominadas para el Jugador 2: $b_2 = 40$ y $b_2 = 80$ están débilmente dominadas por $b_2 = 60$.
- Tras la eliminación nos queda el **equilibrio de Nash bayesiano**: $((60, 80), 60)$.
- Los **pagos** esperados en el equilibrio son:
 - $0,5 \times 0 + 0,5 \times 40 = 20$ para el Jugador 1,
 - $0,5 \times 0 + 0,5 \times 0 = 0$ para el jugador 2.
- El **ingreso esperado del subastador** es $0,5 \times 60 + 0,5 \times 60 = 60$ (recuérdese que recibe el segundo precio).

Cournot: info. privada sobre costes

- Dos empresas compiten en cantidad en un mercado con demanda $p = A - Q$.
- Los costes marginales de la Empresa 1 son c_A o c_B con probabilidades $1/3$, $2/3$ y con $c_A > c_B$.
- Los costes marginales de la Empresa 2 son c_2 .
- Cada empresa **sabe sus costes**.
- La Empresa 1 **sabe** los costes de la Empresa 2.
- La Empresa 2 **no sabe** los costes de la Empresa 1, pero **sabe** que serán c_A o c_B con las probabilidades descritas.

Cournot: info. privada sobre costes

- Planteamos el problema de la Empresa 1:

- Si los costes son c_A :

$$\max_{q_A} (A - q_A - q_2)q_A - c_A q_A,$$

$$q_A = \frac{A - q_2 - c_A}{2}.$$

- Si los costes son c_B :

$$\max_{q_B} (A - q_B - q_2)q_B - c_B q_B,$$

$$q_B = \frac{A - q_2 - c_B}{2}.$$

- Para la Empresa 2:

$$\max_{q_2} \frac{1}{3} (A - q_A - q_2 - c_2)q_2 + \frac{2}{3} (A - q_B - q_2 - c_2)q_2,$$

$$q_2 = \frac{1}{3} \frac{A - q_A - c_2}{2} + \frac{2}{3} \frac{A - q_B - c_2}{2}.$$

- Con las **tres funciones de reacción** encontramos el equilibrio.

Cournot: info. privada sobre demanda

- Dos empresas compiten en cantidad en un mercado con demanda $p = A - Q$ donde A puede ser A_A o A_B , con probabilidades $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$, y $A_A > A_B$.
- Los costes marginales de la Empresa i son c_i .
- La Empresa 1 **conoce** con certidumbre cuál es la demanda.
- La Empresa 2 **no conoce** cuál será la demanda, **pero sabe que será A_A o A_B** con las probabilidades descritas.

Cournot: info. privada sobre demanda

- Planteamos el problema de la Empresa 1:

- Si la demanda es A_A :

$$\max_{q_A} (A_A - q_A - q_2)q_A - c_1 q_A,$$

$$q_A = \frac{A_A - q_2 - c_1}{2}.$$

- Si la demanda es A_B :

$$\max_{q_B} (A_B - q_B - q_2)q_B - c_1 q_B,$$

$$q_B = \frac{A_B - q_2 - c_1}{2}.$$

- Para la Empresa 2:

$$\max_{q_2} \frac{1}{2} (A_A - q_A - q_2 - c_2)q_2 + \frac{1}{2} (A_B - q_B - q_2 - c_2)q_2,$$

$$q_2 = \frac{1}{2} \frac{A_A - q_A - c_2}{2} + \frac{1}{2} \frac{A_B - q_B - c_2}{2}.$$

- Con las **tres funciones de reacción** encontramos el equilibrio.

Contribuciones a un bien público

- Dos jugadores han de decidir simultáneamente si contribuir a la provisión de un bien público.
- Las **acciones** son “contribuir” y “no contribuir”.
- Cada jugador obtiene una **utilidad** de 3 si ambos contribuyen, de 1 si solo uno de ellos decide contribuir y 0 si no contribuye ninguno.
- Para el Jugador 1, **el coste de contribuir es $c_1 \in (1,3)$** .
- Para el Jugador 2, **el coste de contribuir es $c_A \in (0,1)$ o $c_B \in (1,3)$** , con probabilidades $2/5$, $3/5$ respectivamente.
- Cada jugador **conoce** sus costes.
- El Jugador 2 **conoce** los costes del Jugador 1.
- El Jugador 1 **no conoce** los costes del Jugador 2, pero **sabe que pueden ser c_A o c_B** con las probabilidades descritas.

Contribuciones a un bien público

- Los pagos son:

$$t_2 = c_A, \text{ Prob } 2/5$$

		Jugador 2	
		Contribuir	No contribuir
Jugador 1	Contribuir	$3 - c_1, 3 - c_A$	$1 - c_1, 1$
	No contribuir	$1, 1 - c_A$	$0, 0$

$$t_2 = c_B, \text{ Prob } 3/5$$

		Jugador 2	
		Contribuir	No contribuir
Jugador 1	Contribuir	$3 - c_1, 3 - c_B$	$1 - c_1, 1$
	No contribuir	$1, 1 - c_B$	$0, 0$

Contribuciones a un bien público

- Por ejemplo, sean $c_1 = 1,5$, $c_A = 0,2$ y $c_B = 1,8$:

$c_A = 0,2$, Prob 2/5

		Jugador 2	
		Contribuir	No contribuir
Jugador 1	Contribuir	1,5, 2,8	-0,5, 1
	No contribuir	1, 0,8	0, 0

$c_B = 1,8$, Prob 3/5

		Jugador 2	
		Contribuir	No contribuir
Jugador 1	Contribuir	1,5, 1,2	-0,5, 1
	No contribuir	1, -0,8	0, 0

Estrategias tras eliminar “No contribuir” para 2. c_A :

- 1: (C, N),
- 2: (CC, CN).

Construyamos el juego en forma normal.

Contribuciones a un bien público

		Jugador 2	
		CC	CN
Jugador 1	C	1,5, 1,84	0,3, 1,72
	N	1, -0,16	0,4, 0,32

Hay dos EN en estrategias puras: (C, CC) y (N, CN), que serán también los ENB en puras. Habrá también un equilibrio en estrategias mixtas.