

# Juegos Bayesianos

## 1: Definición y equilibrio

Universidad Carlos III de Madrid

# El juego bayesiano

- En los juegos definidos hasta ahora, todos los elementos del juego son **conocidos** por todos los jugadores.
  - Estrategias (acciones).
  - Orden del juego.
  - Función de pagos.
- Es decir, cuando definimos un juego **todos los jugadores saben** qué juego se está jugando.
  - Y también: todos los jugadores **saben que todos los jugadores saben** qué juego se está jugando.
  - Y también: **todos saben que todos saben que todos saben....** qué juego se está jugando.
- Esto se denomina **conocimiento común**. Es decir, una vez definido el juego, este es de conocimiento común.

# El juego bayesiano

- A menudo, alguna de las características del juego **no es conocida** por algún jugador.
- Esto se traduce en que hay jugadores con **información privada** no conocida por otros jugadores.
- En esos casos, los modelos de juego vistos hasta ahora no serían, en principio, adecuados.
- Nuevo modelo: el **juego bayesiano**, donde los pagos no son conocimiento común.
- La información privada sobre alguna de las otras características se puede modelizar también como un caso de información privada sobre los pagos.
- P.e., si la Jugadora 1 no sabe si el conjunto de estrategias de la Jugadora 2 es **{A, B}** o **{A, B, C}** podemos transformar el juego en otro en el que la Jugadora 2 tiene como conjunto de estrategias el **{A, B, C}**, pero la Jugadora 1 no sabe si los pagos de la Jugadora 2 en **caso de elegir la C son los que 2 sabe o son un valor muy bajo** (que hará que C nunca se elija).
- Según si el juego sobre el que hay información asimétrica es **estático** o **dinámico**, así el juego bayesiano será también estático o dinámico. En este tema solo veremos los estáticos.

# El juego bayesiano

Ejemplos de juegos bayesianos.

- Duopolio de Cournot donde los **costes** de la rival son desconocidos.
- Oligopolio de Bertrand donde la **demanda** es incierta, pero una empresa tiene información sobre ella.
- Subasta donde las **valoraciones** de los demás participantes no son conocidas.
- Contribuciones privadas a un bien público sin conocer **costes o valoraciones** de los demás.
- Negociación sin conocer su **factor de descuento** del rival.
- Batalla de los sexos sin saber si la pareja prefiere estar **sola o acompañada**.
- Dilema del prisionero sin conocer si la otra jugador presenta **preferencias altruistas**.

# El juego bayesiano

En el estudio de los juegos bayesianos veremos lo siguiente:

- La **definición** de juego bayesiano para recoger la información asimétrica.
- El uso de las funciones de **mejor respuesta** para definir el equilibrio bayesiano.
- La redefinición del juego bayesiano como un **juego dinámico de información imperfecta**.
- La equivalencia del equilibrio de Nash bayesiano con el **equilibrio de Nash de la forma normal correspondiente a ese juego dinámico**.

# Ejemplo 1

- El Jugador 1 puede elegir entre dos acciones A y B.
- El Jugador 2 puede elegir entre dos acciones I y D.
- Los pagos dependen de los tipos de jugadores.
- El Jugador 1 es de un solo tipo y este es conocido por el Jugador 2.
- El Jugador 2 puede ser del tipo  $x$  o de tipo  $y$ .
- El Jugador 2 sabe su tipo pero el Jugador 1 no sabe con certeza el tipo del Jugador 2.
- El Jugador 1 sabe que el Jugador 2 es del tipo  $x$  con probabilidad  $2/3$ , y del tipo  $y$  con probabilidad  $1/3$ .
- Los pagos, según acciones elegidas y tipo del Jugador 2, se muestran en las siguientes tablas.

# Ejemplo 1

Modelizamos “no conocer los pagos” como “no conocer los tipos”

$p = 2/3$       2 tipo x

		I	D
1	A	4, 3	3, 1
	B	3, 6	2, 3

$p = 1/3$       2 tipo y

		I	D
1	A	3, 3	1, 6
	B	1, 1	5, 3

- Es un **juego bayesiano**.
- **No son dos juegos en forma normal**: no son dos matrices independientes y no se pueden analizar como tales.
- El Jugador 1 **no sabe** en qué matriz están.
- El Jugador 2 **sí sabe** en qué matriz están.

# Ejemplo 1

- Encontramos el equilibrio de Nash bayesiano a partir de las **correspondencias de mejor respuesta**.
- Comencemos por el Jugador 2, que conoce su tipo (y el tipo del Jugador 1):
  - Si 2 es del tipo  $x$ :
    - La estrategia D está estrictamente dominada por la estrategia I. Su mejor respuesta para cualquier estrategia del Jugador 1 será I.
  - Si 2 es del tipo  $y$ :
    - La estrategia I está estrictamente dominada por la estrategia D. Su mejor respuesta para cualquier estrategia del Jugador 1 será D.
  - Es decir, la mejor respuesta del Jugador 2 ante cualquier estrategia del Jugador 1 será **(I, D)**.
- Ahora podremos calcular la mejor respuesta de 1 frente a (I, D):
  - $U_1(A, ID) = (2/3)4 + (1/3)1 = 9/3$
  - $U_1(B, ID) = (2/3)3 + (1/3)5 = 11/3$
- El equilibrio de Nash bayesiano será: **(B, (I, D))**.



# Ejemplo 1

- Este ejemplo ha sido **fácil** porque el Jugador 2 tenía una **estrategia dominante**. En general no será así y tendremos que **calcular todas las mejores respuestas** del Jugador 1 para las posibles estrategias del Jugador 2,  $S_2 = \{II, ID, DI, DD\}$ .
- A partir de ahí encontraríamos estrategias tales que una fuera mejor respuesta frente a la otra y viceversa (lo veremos con más cuidado en el **Ejemplo 2**).

Pago esperado de jugar A:

$$U_1(A, II) = (2/3)4 + (1/3)3 = 11/3$$

$$U_1(A, ID) = (2/3)4 + (1/3)1 = 9/3$$

$$U_1(A, DI) = (2/3)3 + (1/3)3 = 9/3$$

$$U_1(A, DD) = (2/3)3 + (1/3)1 = 7/3$$

Pago esperado de jugar B:

$$U_1(B, II) = (2/3)3 + (1/3)1 = 7/3$$

$$U_1(B, ID) = (2/3)3 + (1/3)5 = 11/3$$

$$U_1(B, DI) = (2/3)2 + (1/3)1 = 5/3$$

$$U_1(B, DI) = (2/3)2 + (1/3)1 = 5/3$$

	II	ID	DI	DD
A	<u>11/3</u>	3	<u>3</u>	7/3
B	7/3	<u>11/3</u>	5/3	<u>3</u>

# Representación del juego bayesiano

El juego bayesiano deberá tener definidos los siguientes elementos:

- El conjunto de **jugadores**:  $N = \{1, 2, \dots, n\}$ .
- Los **tipos** de los jugadores (un tipo por cada parte de información privada que pueda tener un jugador):  $T_i = \{t_i^1, t_i^2, \dots, t_i^{m_i}\}$  para todo  $i \in N$ .
- Cada tipo de cada jugador deberá tener definida una **distribución de probabilidades sobre combinaciones de tipos** (representarán sus creencias sobre los tipos de los rivales):

$$p((t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n) | t_i) = p(t_{-i} | t_i)$$

para todo  $t_{-i} \in T_{-i}$ , para todo  $t_i \in T_i$  y para todo  $i \in N$ .

- Las **acciones** posibles para cada tipo. Por conveniencia, supondremos que todos los tipos de un mismo jugador tienen el **mismo** conjunto de acciones:  $A_{t_i} = A_i = (A_i^1, A_i^2, \dots, A_i^{k_i})$  para todo  $t_i \in T_i$  y para todo  $i \in N$ .
- Una **estrategia** del Jugador  $i$  es un vector de acciones, una por cada tipo:  $(a_{t_i^1}, a_{t_i^2}, \dots, a_{t_i^{m_i}})$ .
- Funciones de **pagos** que dependen no sólo de las acciones sino también de los tipos:
  - Pago del **tipo**  $t_i$ :  $u_{t_i}(a_1, a_2, \dots, a_n; t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n)$ .
  - Pago del **Jugador**  $i$ :
$$u_i(a_1, a_2, \dots, a_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_{t_i \in T_i} p(t_i) u_{t_i}(a_1, a_2, \dots, a_n; t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n).$$

# Representación del juego bayesiano

Nota técnica:

- Estrictamente, como elemento primitivo del modelo de juego bayesiano deberíamos tener una distribución de probabilidad sobre todas las combinaciones de tipos.
- A partir de esta distribución se calcularían todas las demás probabilidades.
- Por ejemplo, sea un juego con 3 jugadores con tipos  $T_1 = \{a, b\}$ ,  $T_2 = \{x, y\}$ ,  $T_3 = \{r, t\}$
- Sea la distribución de probabilidad sobre tipos:  
 $(p(a, x, r), p(a, x, t), p(a, y, r), p(a, y, t), p(b, x, r), p(b, x, t), p(b, y, r), p(b, y, t))$ .  
Estas probabilidades son números entre 0 y 1, cuya suma es 1.
- Ahora podemos calcular, por ejemplo:
  - $p(a) = p(a, x, r) + p(a, x, t) + p(a, y, r) + p(a, y, t)$ .
  - $p(x, t|a) = \frac{p(a, x, t)}{p(a)}$ .

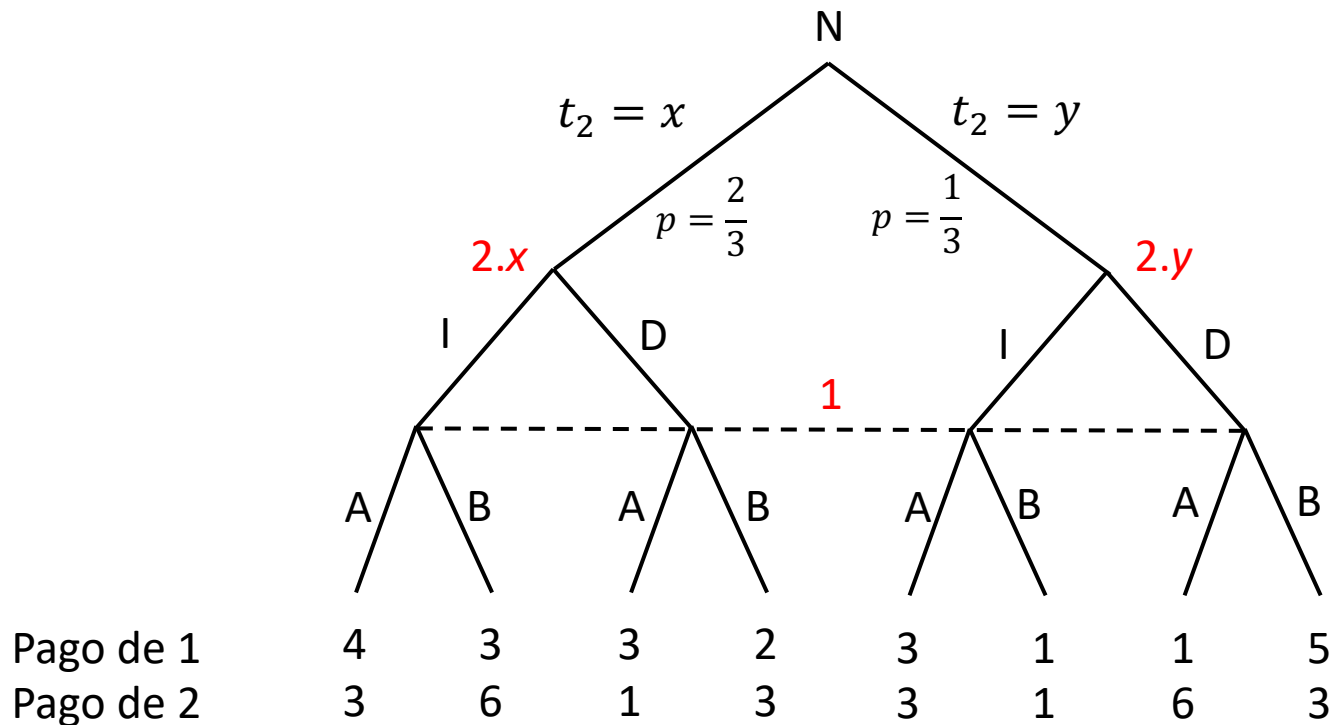
# Representación del juego bayesiano

Veamos la representación bayesiana del ejemplo 1:

- Jugadores,  $N = \{1, 2\}$ .
- Tipos:  $T_1 = \{1\}$ ,  $T_2 = \{x, y\}$ .
- Probabilidades sobre tipos: cada uno de los tres tipos tiene creencias sobre los demás.
  - $p(x|1) = \frac{2}{3}$ ,  $p(y|1) = \frac{1}{3}$ ,
  - $p(1|x) = 1$ ,
  - $p(1|y) = 1$ .
- Acciones:  $A_1 = \{A, B\}$ ,  $A_x = A_y = \{I, D\}$ .
- Estrategias:
  - $S_1 = A_1 = \{A, B\}$ ,
  - $S_2 = A_x \times A_y = \{II, ID, DI, DD\}$ .
- Pagos: las 2 matrices de la transparencia 7.

# Representación del juego bayesiano

El juego bayesiano se puede representar mediante su forma extensiva.



Conjuntos de información. Jugador 1:  $\{1\}$ , Jugador 2:  $\{2.x, 2.y\}$ .

Estrategias:  $S_1 = \{A, B\}$ ,  $S_2 = \{II, ID, DI, DD\}$ .

## Ejemplo 2

- La batalla de sexos con información asimétrica.
- Ella prefiere que salgan juntos antes que separados, y prefiere el fútbol a la ópera.
- Las preferencias de Él dependen de si está agobiado o no.
  - Si está agobiado prefiere pasar la noche sin su pareja.
  - Si no está agobiado (normal) prefiere pasar la noche con Ella.
  - En ambos casos prefiere la ópera al fútbol.
- Los pagos se indican en las siguientes tablas.
- Ella cree que es igual de probable que él esté agobiado como que no lo esté.

# Ejemplo 2

Pagos si Él está normal

Prob. = 1/2

		Él	
		F	O
Ella	F	2, 1	0, 0
	O	0, 0	1, 2

Pagos si Él está agobiado

Prob. = 1/2

		Él	
		F	O
Ella	F	2, 0	0, 2
	O	0, 1	1, 0

# Ejemplo 2

Analicemos la mejor respuesta de Él.

		Él normal	
		F	O
Ella	F	2, <u>1</u>	0, 0
	O	0, 0	1, <u>2</u>

		Él agobiado	
		F	O
Ella	F	2, 0	0, <u>2</u>
	O	0, <u>1</u>	1, 0

Si ella elige fútbol la mejor respuesta de Él es: fútbol si normal y ópera si agobiado.

Si ella elige ópera la mejor respuesta de Él es: ópera si normal, y fútbol si agobiado.

$$MR_{\text{Él}}(F) = FO, MR_{\text{Él}}(O) = OF.$$



# Ejemplo 2

Mejor Respuesta de Ella.

	FF	FO	OF	OO
F	<u>2</u>	<u>1</u>	<u>1</u>	0
O	0	0,5	0,5	<u>1</u>

$$MR_{\text{Ella}}(\text{FF}) = \text{F}$$

$$MR_{\text{Ella}}(\text{FO}) = \text{F}$$

$$MR_{\text{Ella}}(\text{OF}) = \text{F}$$

$$MR_{\text{Ella}}(\text{OO}) = \text{O}$$

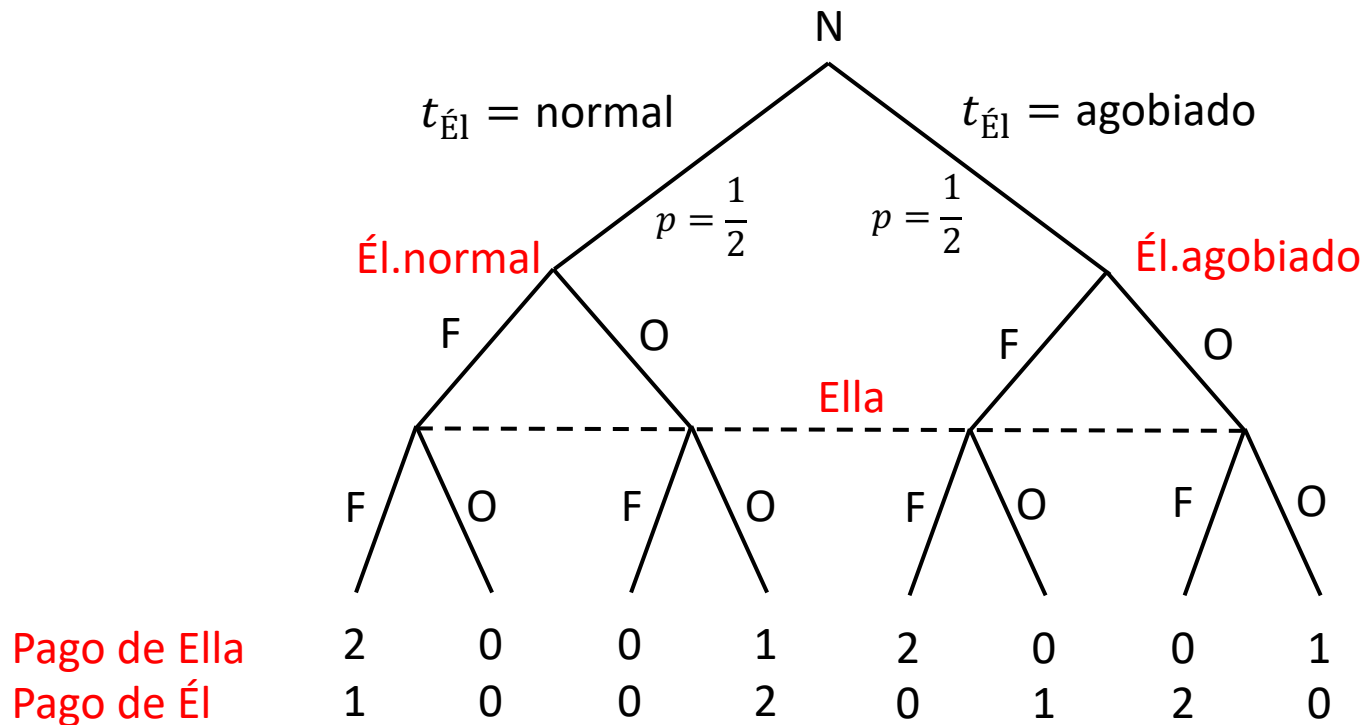
$$MR_{\text{Él}}(\text{F}) = \text{FO}$$

$$MR_{\text{Él}}(\text{O}) = \text{OF}$$

ENB: (fútbol, (fútbol si normal, y ópera si agobiado)) = (F, FO)

# Ejemplo 2

Forma extensiva de la batalla de sexos con información asimétrica.



Encontremos el ENPS de esta forma extensiva.

Como solo hay un subjuego, coincidirá con el EN.

# Ejemplo 2

Pasemos a la forma normal:

	FF	FO	OF	OO
F	<u>2</u> , 0,5	<u>1</u> , <u>1,5</u>	<u>1</u> , 0	0, 1
O	0, 0,5	0,5, 0	0,5, <u>1,5</u>	<u>1</u> , 1

- EN: (F, FO), que **coincide** con el equilibrio bayesiano.
- De hecho, el EN de la forma normal correspondiente a la forma extensiva de un juego bayesiano es **siempre** el equilibrio de Nash bayesiano del juego bayesiano.

# Extensiones

- Ella tiene un tipo, Él tres tipos. La matriz de la forma normal será  $2 \times 8$ .
- Ella y Él tienen dos tipos.
- Ella y Él tienen un número arbitrario de tipos.
- Hay metacreencias: Él tiene 2 tipos, Ella tiene creencias sobre estos dos tipos. Él no sabe cuáles son estas creencias de Ella, pero tiene formadas unas creencias sobre esas creencias de Ella.
- Lo anterior se puede complicar tanto como se quiera. Según el teorema de Harsanyi, siempre se podrá modelizar como lo hemos hecho, multiplicando el número de tipos.
- Hay más de dos jugadores.
- Los jugadores eligen secuencialmente. Quien juega después observa la acción, pero no el tipo de quien ha jugado.
- Estas extensiones no se verán en este curso.