Juegos Repetidos

2. Repetición infinita

Universidad Carlos III de Madrid

Repetición infinita

- Se juega un juego simultáneo o de etapa en los períodos 1, 2, 3,… sin final.
- En cada período t se observan los resultados de todas las etapas anteriores, desde 1 hasta $t-1$.
- Cada jugador descuenta sus pagos futuros usando un factor de descuento δ, $0 < \delta < 1$.
- La forma extensiva será infinita y no tendrá vértices finales, por lo que tenemos que revisar la definición de estrategia y la asignación de pagos.
- Una estrategia será una regla para asociar acciones del juego estático a cada subjuego en cada etapa dependiendo de la historia que lleva a esa etapa y que determina el subjuego.
- En lugar de asignar pagos a vértices finales, asignaremos un pago a cada posible manera de jugar como la suma descontada de los pagos que se obtienen en cada etapa.
- Ejemplo: el valor presente de obtener Π en cada periodo es:

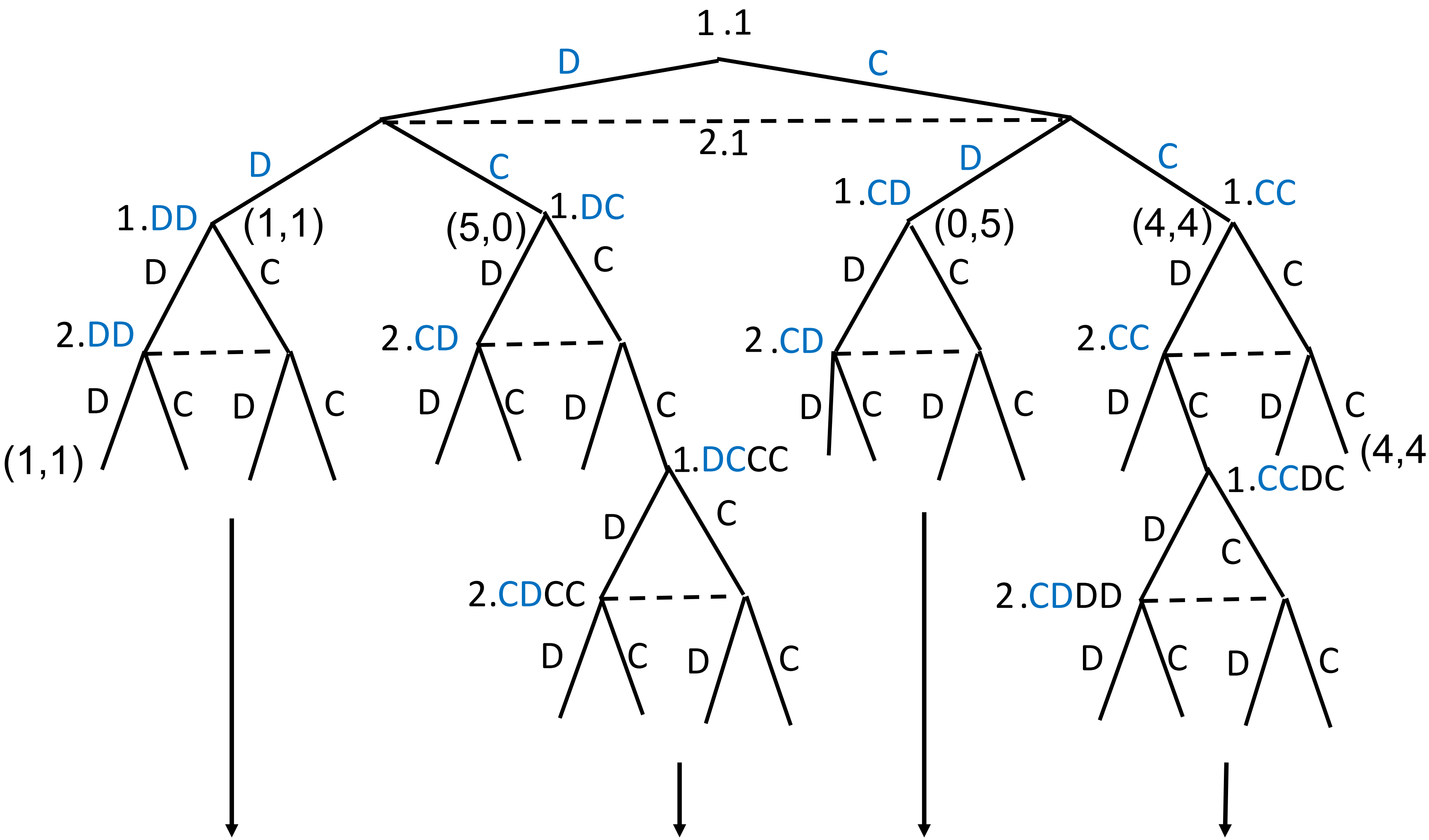
$$\Pi + \delta\Pi + \delta^2\Pi + \delta^3\Pi + \cdots = \Pi \sum_{t=0}^{\infty} \delta^t = \frac{1}{1-\delta}\Pi.$$

El dilema del prisionero

- Como en el caso de los juegos finitos, el número de equilibrios puede ser enorme.
- En lugar de encontrarlos todos, buscaremos equilibrios interesantes, típicamente, los que sostienen determinados pagos.
- P.ej., consideremos el juego repetido consistente en jugar un número infinito de veces el dilema del prisionero: ¿es posible sostener la cooperación en su repetición infinita?

		Jugador 2	
		D	C
Jugadora 1	D	1 , 1	5 , 0
	C	0 , 5	4 , 4

Forma extensiva



Infinitas repeticiones

Estrategia gatillo

- Hay infinitos subjuegos.
- Cada subjuego es idéntico al juego completo.
- Buscaremos sostener la cooperación.
- Usaremos estrategias resorte o gatillo:
    - Cooperar si se ha cooperado en el pasado (premio).
    - Tras una desviación, jugar un EN del juego de etapa para siempre (castigo).
- Más formalmente, para nuestro ejemplo:
    - En $t = 1$: Jugar (C, C).
    - En $t > 1$: Jugar (C, C) si se ha jugado (C, C) en todo $t' < t$.
      Jugar (D, D) si en algún $t' < t$ no se jugó (C, C).

Estrategia gatillo

- Veamos que esta estrategia es un ENPS.
- Dos pasos:
  1. Comprobar que es un EN del juego repetido.
  2. Comprobar que es un EN de cada subjuego.
- Nos ayudarán dos hechos:
  - Cada subjuego es idéntico al juego entero.
  - La estrategia gatillo divide a los infinitos subjuegos en dos grupos:
    1. Subjuegos tras una historia de cooperación.
    2. Subjuegos tras una historia donde alguna vez no se cooperó.

Estrategia gatillo

En $t = 1$:	Jugar (C, C).
En $t > 1$:	Jugar (C, C) si se ha jugado (C, C) en todo $t' < t$.
	Jugar (D, D) si en algún $t' < t$ no se jugó (C, C).

- Es un EN del juego repetido:
- Si ambos jugadores siguen la estrategia gatillo, cada uno tendrá:

$$4 + 4\delta + 4\delta^2 + 4\delta^3 + \cdots = \frac{4}{1-\delta}$$

- Si uno se desvía solo en la primera etapa y en ella juega D tendrá:

$$5 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + \cdots = 5 + \frac{\delta}{1-\delta}$$

- Esa desviación no da más beneficios que seguir la estrategia siempre y cuando:

$$\frac{4}{1-\delta} \geq 5 + \frac{\delta}{1-\delta} \qquad \text{o bien} \qquad \delta \geq \frac{1}{4}.$$

- ¿Hemos demostrado que es equilibrio de Nash si $\delta \geq \frac{1}{4}$?
- No: solo hemos comprobado que una de entre infinitas desviaciones posibles no es provechosa.

Estrategia gatillo

En $t = 1$: Jugar (C, C).

En $t > 1$: Jugar (C, C) si se ha jugado (C, C) en todo $t' < t$.
Jugar (D, D) si en algún $t' < t$ no se jugó (C, C).

- ¿Qué otras desviaciones puede haber?:
  - Desviaciones de un solo periodo $t > 1$.
  - Desviaciones de más de un periodo.
- Si un jugador se desvía a D en un solo periodo en en el momento $t > 1$:

$$4 + 4\delta + \cdots + 4\delta^{t-1} + 5\delta^t + \delta^{t+1} + \delta^{t+2} + \cdots,$$

que deberá compararse con lo que gana sin desviarse:

$$4 + 4\delta + \cdots + 4\delta^{t-1} + 4\delta^t + 4\delta^{t+1} + 4\delta^{t+2} + \cdots,$$

Si eliminamos los primeros t términos $(4 + 4\delta + \cdots + 4\delta^{t-1})$, que son iguales en ambos casos, y dividimos por δ^t, estamos en el mismo caso que en la desviación en el momento $t = 1$.

- Si un jugador se desvía a D en $t = 1$ y se vuelve a desviar en periodos posteriores t_1, t_2, …:

$$5 + \delta + \delta^2 + \cdots + \delta^{t_1-1} + 0\delta^{t_1} + \delta^{t_1+1} + \cdots + \delta^{t_2-1} + 0\delta^{t_2} + \delta^{t_2+1} + \cdots.$$

Se observa que el pago es menor que en la desviación solo en $t = 1$:

$$5 + \delta + \delta^2 + \cdots + \delta^{t_1-1} + \delta^{t_1} + \delta^{t_1+1} + \cdots + \delta^{t_2-1} + \delta^{t_2} + \delta^{t_2+1} + \cdots.$$

- Por tanto, la mejor desviación es desviarse en un único periodo. Por lo tanto, ahora sí podemos concluir que la estrategia gatillo es un EN del juego entero si $\delta \geq \frac{1}{4}$.

Estrategia gatillo

En $t = 1$: Jugar (C, C).
En $t > 1$: Jugar (C, C) si se ha jugado (C, C) en todo $t' < t$.
Jugar (D, D) si en algún $t' < t$ no se jugó (C, C).

- Mostremos ahora que la estrategia gatillo es EN en cada subjuego distinto del juego entero.
- Recordemos que todos los subjuegos son iguales (repetición infinita del dilema del prisionero) y que la estrategia gatillo distingue dos tipos de subjuegos a la hora de prescribir su estrategia:
  1) subjuegos tras una historia de cooperación
  2) subjuegos tras una historia donde alguna vez no se ha cooperado.
- Subjuegos en t tras haber jugado (C, C) en todo $t' < t$:
  - En estos subjuegos la estrategia gatillo prescribe lo mismo que en $t = 1$ y el subjuego es el mismo que el juego entero.
  - Por tanto, la estrategia gatillo será EN en estos subjuegos en las mismas condiciones que en el juego entero.
- Subjuegos en t si en algún $t' < t$ no se jugó (C, C).
  - Si los jugadores no se desvían, cada uno obtendrá:
    $\delta^{t_1} + \delta^{t_1+1} + \cdots + \delta^{t_2-1} + \delta^{t_2} + \delta^{t_2+1} + \cdots.$
  - Si uno se desvía en t_1, t_2, …:
    $0\delta^{t_1} + \delta^{t_1+1} + \cdots + \delta^{t_2-1} + 0\delta^{t_2} + \delta^{t_2+1} + \cdots.$
  - Por tanto, en estos subjuegos, la estrategia gatillo prescribe un EN para cualquier valor de δ.
- Concluimos que la estrategia gatillo es un ENPS.

Estrategia gatillo

- Hay muchos otros pagos que se pueden sostener, además de (1, 1) o (4, 4) en ENPS. Veamos cómo obtener otro.
- Consideremos la siguiente estrategia gatillo:
  - En $t = \text{impar}$ jugar (C, C).
  - En $t = \text{par}$ jugar (D, C).
  - Seguir jugando así si nadie se desvía.
  - Si en algún momento alguien se desvía, jugar (D, D) para siempre a partir de entonces.
- Si siguen la estrategia, el Jugador 1 obtendrá

$$4 + \delta 5 + \delta^2 4 + \delta^3 5 + \cdots = \frac{4}{1-\delta^2} + \frac{5\delta}{1-\delta^2}.$$

- Mientras que la Jugadora 2 obtendrá

$$4 + \delta 0 + \delta^2 4 + \delta^3 0 + \cdots = \frac{4}{1-\delta^2}.$$

- Para valores suficientemente altos de δ, la estrategia es un ENPS.
- En general, se puede diseñar la siguiente estrategia gatillo, que será ENPS para valores suficientemente altos de δ:
  - Definir una manera de jugar que dé los pagos que se quieren sostener (deben ser mayores o iguales a los pagos en el EN).
  - Seguir con esa manera de jugar mientras nadie se desvíe de ella.
  - Si alguien se desvía, pasar a jugar en EN para siempre.

Repetición indefinida o incierta

- Terminación incierta: el juego continúa el período siguiente con probabilidad p.
- Mantenemos la tasa de descuento δ.
- El pago esperado actual descontado de una serie de pagos temporales será:

$$\Pi_1 + p\delta\Pi_2 + (p\delta)^2\Pi_3 + (p\delta)^3\Pi_4 + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty}(p\delta)^{t-1}\,\Pi_t.$$

- En particular, si $\Pi_t = \Pi$ para todo t:

$$\sum_{t=1}^{\infty}(p\delta)^{t-1}\,\Pi_t = \Pi\sum_{t=0}^{\infty}(p\delta)^t = \frac{1}{1-p\delta}\Pi.$$

- Se observa que el modelo será equivalente al estudiado con una tasa de descuento $\delta' = p\delta$.

Aplicación al oligopolio de Cournot

- Las empresas interactúan un numero infinito de veces (o con un final sin precisar):
  - Pueden aprender a coordinar sus estrategias
  - Pueden amenazar con periodos de castigo (beneficios bajos) en caso de desvío.
- Implicaciones:
  - Si las empresas son suficientemente pacientes, se sostienen precios cercanos a los de monopolio en cada periodo.
  - Cuanto mayor es el número de empresas, más difícil es la colusión.

Aplicación al oligopolio de Cournot

- Recordemos el juego de Cournot visto en juegos estáticos (2 empresas, demanda lineal y costes marginales constantes e iguales:
  $\Pi_i = q_i(a-(q_1+q_2)) - cq_i$.
- El equilibrio de Nash-Cournot es: $\left(q_1^C, q_2^C\right) = \left(\frac{a-c}{3}, \frac{a-c}{3}\right)$.
- Los beneficios en el equilibrio son $\Pi_i^C = \Pi_i^C = \frac{1}{9}(a-c)^2$.
- Recordemos también que la cantidad de monopolio que maximiza los beneficios es $q^M = \frac{a-c}{2}$, con beneficios $\Pi^M = \frac{1}{4}(a-c)^2$.
- Por tanto, si cada empresa produce $q_i^M = \frac{q^M}{2} = \frac{a-c}{4}$, cada una disfrutaría de beneficios $\Pi_i^M = \frac{\Pi^M}{2} = \frac{1}{8}(a-c)^2$, mayores que en el equilibrio de Nash-Cournot.

Aplicación al oligopolio de Cournot

- Estrategia gatillo:
  - Empezar cooperando y seguir cooperando mientras nadie se desvíe.
  - En cuanto alguien se desvíe, dejar de cooperar.
- Formalmente:
  - En $t = 1$: Jugar $(q_1^M, q_2^M) = \left(\frac{a-c}{4}, \frac{a-c}{4}\right)$.
  - En $t > 1$: Jugar (q_1^M, q_2^M) si se ha jugado (q_1^M, q_2^M) en todo $t' < t$.

    Jugar $\left(q_1^C, q_2^C\right) = \left(\frac{a-c}{3}, \frac{a-c}{3}\right)$ si en algún $t' < t$ no se jugó (q_1^M, q_2^M).
- Diferencias con el dilema del prisionero repetido:
  - Hay infinitas estrategias en el juego de etapa, en lugar de dos.
  - La mejor desviación en el juego de etapa frente a q_j^M no es jugar q_i^C, sino lo que indique la función de reacción. Llamemos q_i^D a esta mejor desviación:

$$q_i^D = \frac{a-c-q_j^M}{2} = \frac{a-c-\frac{a-c}{4}}{2} = \frac{3}{8}(a-c).$$

  - Los beneficios para la Empresa i de $\left(q_i^D, q_j^M\right)$ son:

$$\Pi_i^D\left(q_i^D, q_j^M\right) = \left(a - \frac{3}{8}(a-c) - \frac{a-c}{4} - c\right)\frac{3}{8}(a-c) = \frac{9}{64}(a-c)^2.$$

Aplicación al oligopolio de Cournot

- Veamos si la estrategia gatillo es un ENPS:
- Si las empresas siguen la estrategia gatillo, cada una tendrá:

$$\Pi_i^M + \delta\Pi_i^M + \delta^2\Pi_i^M + \cdots = \Pi_i^M \frac{1}{1-\delta} = \frac{1}{8}(a-c)^2 \frac{1}{1-\delta}.$$

- Si la Empresa i se desvía solo durante el primer periodo tendrá:

$$\Pi_i^D + \delta\Pi_i^C + \delta^2\Pi_i^C + \cdots = \frac{9}{64}(a-c)^2 + \frac{1}{9}(a-c)^2 \frac{\delta}{1-\delta}.$$

- La desviación no será provechosa si:

$$\frac{1}{8}(a-c)^2 \frac{1}{1-\delta} \geq \frac{9}{64}(a-c)^2 + \frac{1}{9}(a-c)^2 \frac{\delta}{1-\delta}.$$

- Resolviendo para δ obtenemos que $\delta \geq \frac{9}{17}$ es la condición para que ninguna empresa se quiera desviar.
- Repitiendo los mismos argumentos que vimos para el dilema del prisionero, mostraremos que esta es la mejor desviación y, por tanto la estrategia gatillo es un EN.
- También repitiendo esos argumentos, mostraremos que es un EN en los subjuegos y, con ello un ENPS.

Más resultados en juegos repetidos infinitos

- Retomemos el dilema del prisionero repetido infinitas veces.
- La estrategia de gatillo es demasiado severa y castiga a ambos jugadores demasiado tiempo. Es posible diseñar una estrategia para limitar el castigo a un número pequeño de periodos y para castigar solo al que se desvía.
- El análisis se puede extender a más jugadores.
- El análisis se puede extender también al caso de encuentros casuales entre dos jugadores al azar dentro de una sociedad:
  - Ej.: en una sociedad con 100 individuos, cada día dos jugadores al azar juegan el dilema del prisionero. Todos observan su comportamiento.
  - Reglas:
    - Cada jugador nace con la etiqueta "cooperador". La etiqueta es visible.
    - La etiqueta se mantiene si siempre coopera frente a alguien con la etiqueta "cooperador" y si no coopera frente a quien tiene la etiqueta "no cooperador".
    - Si no sigue la estrategia anterior, su etiqueta cambia a "no cooperador".
  - Con esas reglas, cooperar frente a quien tiene la etiqueta "cooperador" y no cooperar frente a quien tiene la etiqueta "no cooperador" es un ENPS.

Vuelta a juegos repetidos finitos

- Retomemos el dilema del prisionero repetido finitas veces.
- Según nuestro análisis, el único ENPS consiste en repetir el EN en cada etapa en todos los subjuegos.
- Sin embargo, si el juego se repite, digamos 200 veces, es difícil pensar que no pudiera haber cooperación durante muchos periodos (todos menos unos pocos al final).
- Pequeñas desviaciones del supuesto de racionalidad permiten que, efectivamente, ese sea el caso. Estos son tres ejemplos:
  - Un jugador puede pensar que el número de repeticiones es distinto del real y, el otro jugador, tenerlo en cuenta.
  - Puede haber una probabilidad de equivocarse al contar.
  - Con cierta probabilidad, un jugador puede ser irracional y cooperar siempre.