

Juegos Repetidos

1: Repetición finita

Universidad Carlos III de Madrid

Juegos repetidos un número finito de veces

- Un juego repetido un número **finito** de veces es un juego dinámico en el que un juego simultáneo (**juego de etapa**) se juega un número finito de veces y los resultados de cada etapa son **observados** antes de la siguiente.
- Ejemplo: Jugar el dilema del prisionero varias veces. El juego de etapa es el juego simultáneo del dilema del prisionero.

Resultados

- El juego repetido tiene un **único ENPS** si el juego de etapa (el juego simultáneo) tiene un **único EN**: jugar las estrategias de EN en cada etapa.
- Si el juego de etapa **tiene 2 o más EN**, pueden existir ENPS en los que en alguna etapa **NO** se juegan estrategias que sean EN sino que se juega algo que es mejor para los dos jugadores.

Dilema del prisionero repetido dos veces

- Dos jugadores juegan el mismo juego **simultáneo** dos veces, en $t = 1$ y en $t = 2$.
- El resultado de la primera vez que se juega (de $t = 1$) es **observado** antes de jugarlo una segunda vez.
- El pago del juego repetido es la **suma** de los pagos en cada periodo ($t = 1, t = 2$).
- ¿Cuál es el ENPS?

		Jugador 2	
		D	C
Jugadora 1	D	1, 1	5, 0
	C	0, 5	4, 4

Dilema del prisionero repetido dos veces

¿Conjuntos de información?
5 para cada jugador

5 para cada jugador

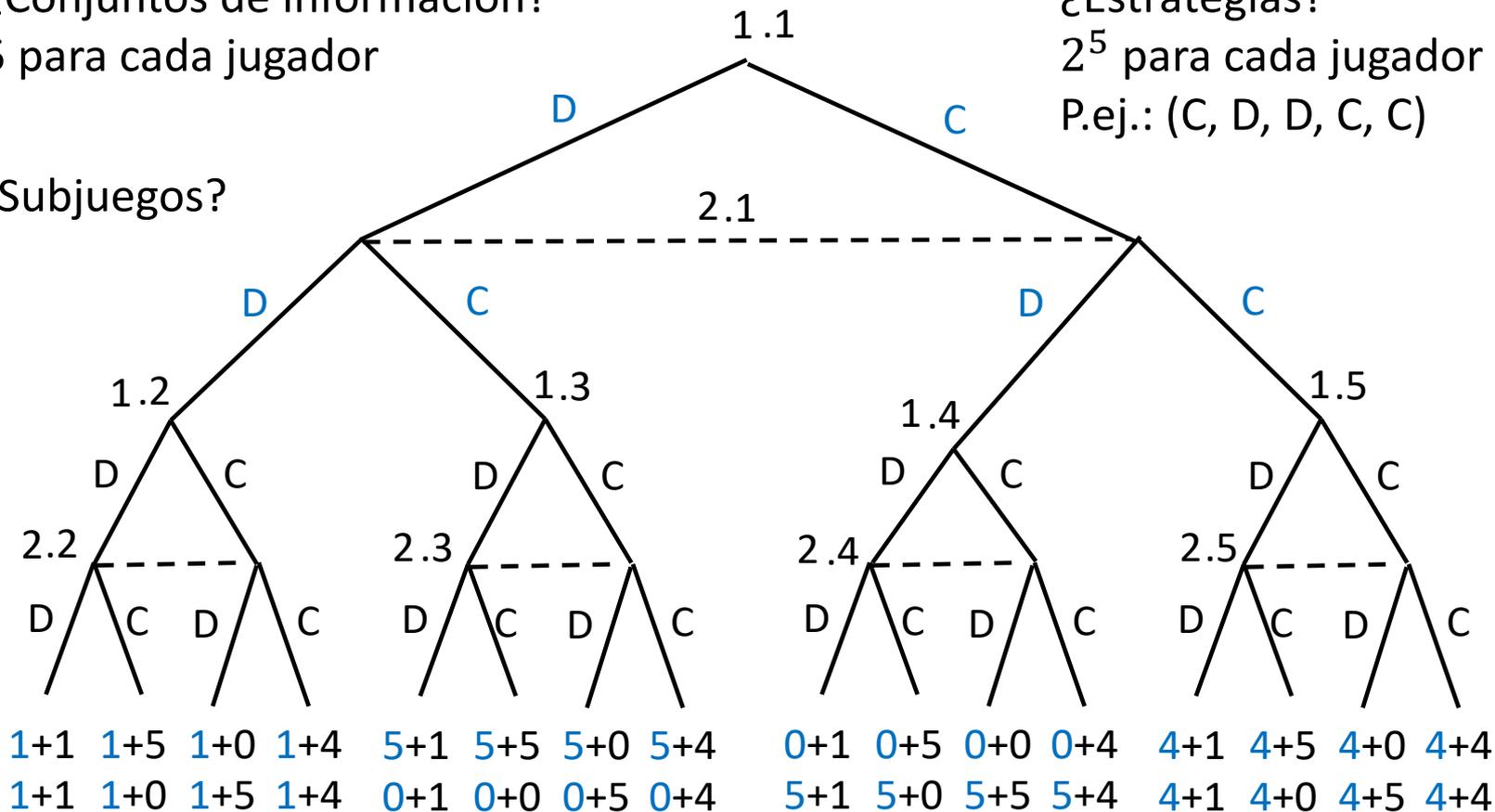
¿Estrategias?
 2^5 para cada jugador

2^5 para cada jugador

P.ej.: (C, D, D, C, C)

¿Subjuegos?
5

5

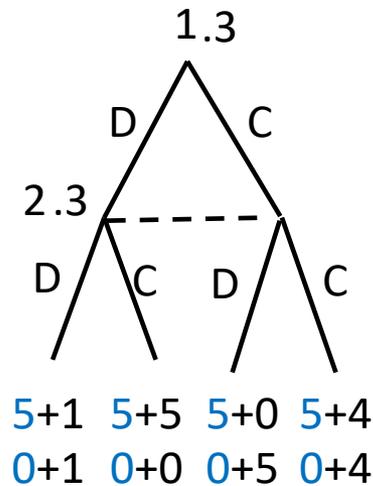


Dilema del prisionero repetido dos veces

Encontremos los EN de los subjuegos.

Tomemos el que comienza en 1.3.

Los demás se resuelven de la misma manera.



Jugador 1

		Jugadora 2	
		D	C
Jugador 1	D	<u>5+1</u> , <u>0+1</u>	<u>5+5</u> , <u>0+0</u>
	C	<u>5+0</u> , <u>0+5</u>	<u>5+4</u> , <u>0+4</u>

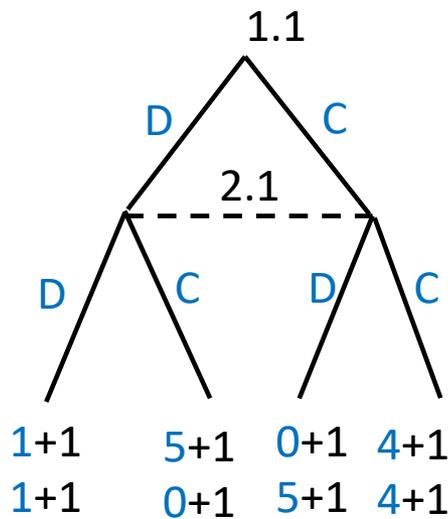
		Jugadora 2	
		D	C
Jugador 1	D	<u>1</u> , <u>1</u>	<u>5</u> , <u>0</u>
	C	<u>0</u> , <u>5</u>	<u>4</u> , <u>4</u>

Añadir o no los **pagos de la primera etapa** no afecta al juego.

En cada subjuego tenemos el **mismo** dilema del prisionero.

Dilema del prisionero repetido dos veces

- En cada uno de los cuatro subjuegos hay un **único EN** que es (D, D).
- **Sustituimos**, por inducción hacia atrás, el subjuego por sus pagos en el EN ((1, 1) en todos) y resolvemos el juego completo.



		Jugadora 2	
		D	C
Jugador 1	D	<u>1+1</u> , <u>1+1</u>	<u>5+1</u> , 0+1
	C	0+1, <u>5+1</u>	4+1, 4+1

		Jugadora 2	
		D	C
Jugador 1	D	<u>1</u> , <u>1</u>	<u>5</u> , 0
	C	0, <u>5</u>	4, 4

Volvemos a tener un **dilema del prisionero**, con EN: (D, D).

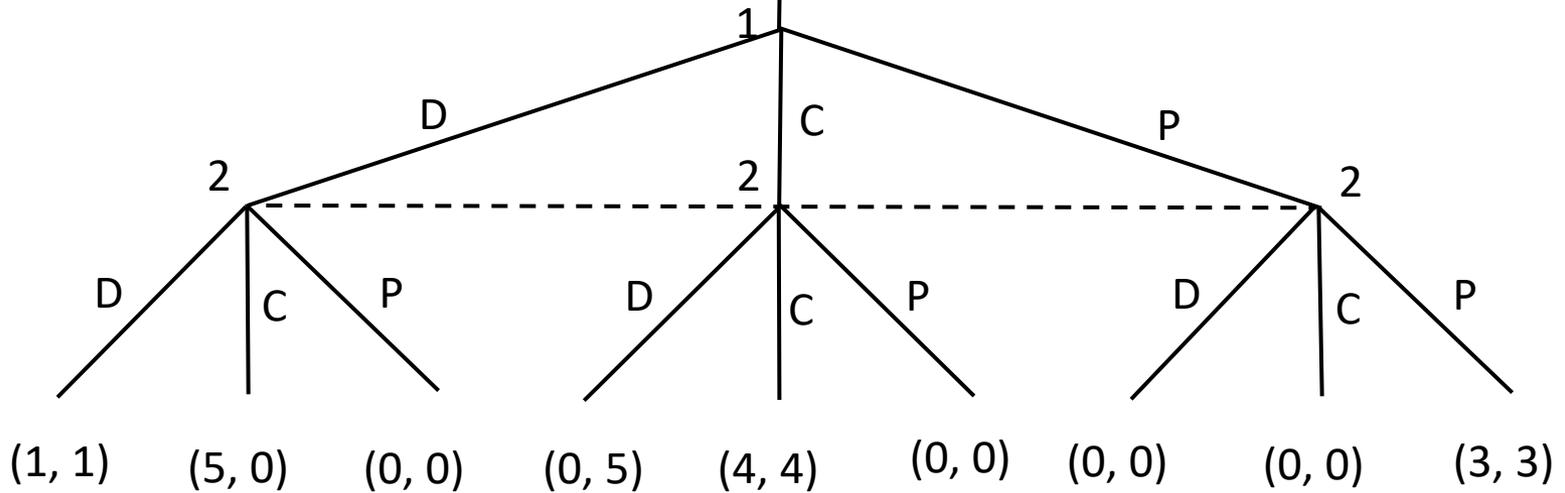
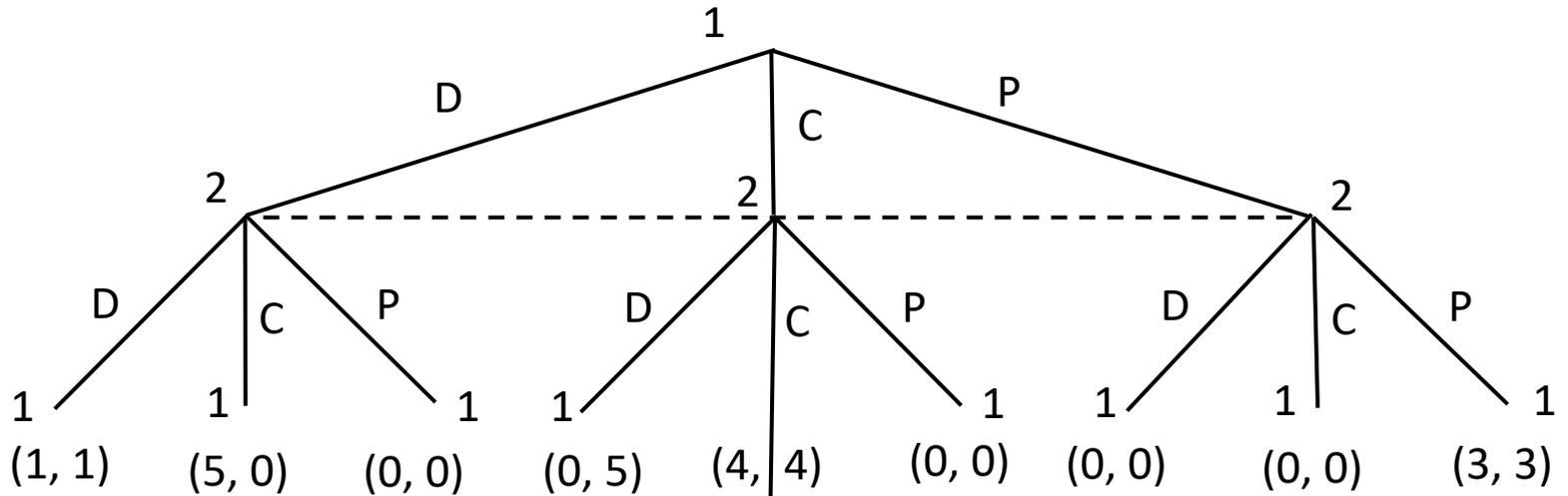
El **único** ENPS es ((D, D, D, D, D), (D, D, D, D, D)).

El dilema del prisionero ampliado

		Jugadora 2		
		D	C	P
Jugador 1	D	<u>1</u> , <u>1</u>	<u>5</u> , 0	0, 0
	C	0, <u>5</u>	4, 4	0, 0
	P	0, 0	0, 0	<u>3</u> , <u>3</u>

- Juguemos **dos veces** el juego anterior. Es el dilema del prisionero al que hemos **añadido** una estrategia.
- (D, D) sigue siendo equilibrio de Nash.
- Además, hay un **nuevo equilibrio**: (P, P).
- ¿Puede jugarse **(C, C)** en un ENPS?
- En los subjuegos de la segunda etapa no tenemos por qué tener el mismo EN, por tanto el juego de la primera etapa no tiene por qué ser el mismo juego que el original.

El dilema del prisionero ampliado



El dilema del prisionero ampliado

- Para sostener la cooperación (C, C) en la primera etapa **juguemos con los EN de la segunda**:
 - Si se ha cooperado en la primera etapa, en la segunda etapa se juega el **EN con mejores** pagos: (P, P).
 - Si no se ha cooperado, en la segunda etapa se juega el **EN con peores** pagos: (D, D).
- Formalmente:
 - En $t = 1$: (C, C).
 - En $t = 2$: (P, P) si se jugó (C, C) en $t = 1$,
(D, D) si no se jugó (C, C) en $t = 1$.

El dilema del prisionero ampliado

En $t = 1$: (C, C).

En $t = 2$: (P, P) si se jugó (C, C) en $t = 1$,

(D, D) si no se jugó (C, C) en $t = 1$.

- Veamos si la estrategia anterior es un ENPS:
 - Prescribe un equilibrio de Nash en **cada subjuego de la segunda etapa**: (P, P) o (D, D).
 - Falta ver si es un EN del **juego entero**.
- Si se **sigue** la estrategia, cada jugador gana $4 + 3 = 7$.
- Si un jugador se **desvía**:
 - **En la segunda etapa no se puede mejorar** desviándose (recordemos que se prescribe un EN).
 - **En la primera etapa la mejor desviación desde (C, C) es D**. En esta primera etapa, quien se desvía pasa a ganar 5, pero en la segunda etapa se llega a un subjuego en el que el equilibrio es (D, D), con pago 1.
 - El total para quien se desvía será $5 + 1 = 6$, menos que los 7 de no desviarse.
- Por tanto, la estrategia es un **ENPS**.

El dilema del prisionero ampliado

Recuérdese:

En $t = 2$: (P, P) si se jugó (C, C) en $t = 1$,

(D, D) si no se jugó (C, C) en $t = 1$.

		Jugadora 2		
		D	C	P
Jugador 1	D	1 + 1, 1 + 1	5 + 1, 0 + 1	0 + 1, 0 + 1
	C	0 + 1, 5 + 1	4 + 3, 4 + 3	0 + 1, 0 + 1
	P	0 + 1, 0 + 1	0 + 1, 0 + 1	3 + 1, 3 + 1

		Jugadora 2		
		D	C	P
Jugador 1	D	<u>2</u> , <u>2</u>	6, 1	1, 1
	C	1, 6	<u>7</u> , <u>7</u>	1, 1
	P	1, 1	1, 1	<u>4</u> , <u>4</u>

El dilema del prisionero ampliado

- Para cada **combinación** de EN en los subjuegos de la segunda etapa habrá distintos ENPS.
- ¿Cuántas combinaciones hay?
- Son 9 subjuegos, con dos EN en puras en cada uno. Habrá $2^9 = 512$ combinaciones distintas.
- Es complicado analizar todas. En lugar de ello, podemos buscar **equilibrios interesantes** como el que hemos encontrado.
- Veamos tres **ejemplos** más de ENPS:
 - Jugar (D, D) siempre (en $t = 1$ y en $t = 2$ en todos los subjuegos).
 - Jugar (P, P) siempre.
 - Jugar (D, D) en $t = 1$ y (P, P) en $t = 2$ en todos los subjuegos.
- Hay **muchos** más. De hecho, lo que se estudia en estos juegos es qué **conjunto de pagos** se puede obtener en algún ENPS.

El juego del gallina

	S	P
S	0, 0	5, 1
P	1, 5	4, 4

- El juego tiene **3 EN**: $\left\{ (P, S), (S, P), \left(\frac{1}{2}[S] + \frac{1}{2}[P], \frac{1}{2}[S] + \frac{1}{2}[P] \right) \right\}$, con pagos respectivos (1, 5), (5, 1), (2,5, 2,5).
- Repitamos el juego **2 veces**. ¿Se puede sostener (P, P) en la primera etapa?
- Definamos la siguiente estrategia:
 - En $t = 1$: (P, P).
 - En $t = 2$: $\left(\frac{1}{2}[S] + \frac{1}{2}[P], \frac{1}{2}[S] + \frac{1}{2}[P] \right)$ si se jugó (P, P) o (S, S) en $t = 1$,
(P, S) si se jugó (S, P) en $t = 1$,
(S, P) si se jugó (P, S) en $t = 1$.
- Obsérvese que en esta estrategia **solo se castiga al que se desvía unilateralmente**.
- Utilidad si **no se desvían**: $4 + 2,5 = 6,5$.
- Utilidad de i si se **desvía en $t = 1$** : $5 + 1 = 6$.
- Es un ENPS.