Juegos Dinámicos

4. Aplicaciones Económicas

Universidad Carlos III de Madrid

Aplicaciones Económicas

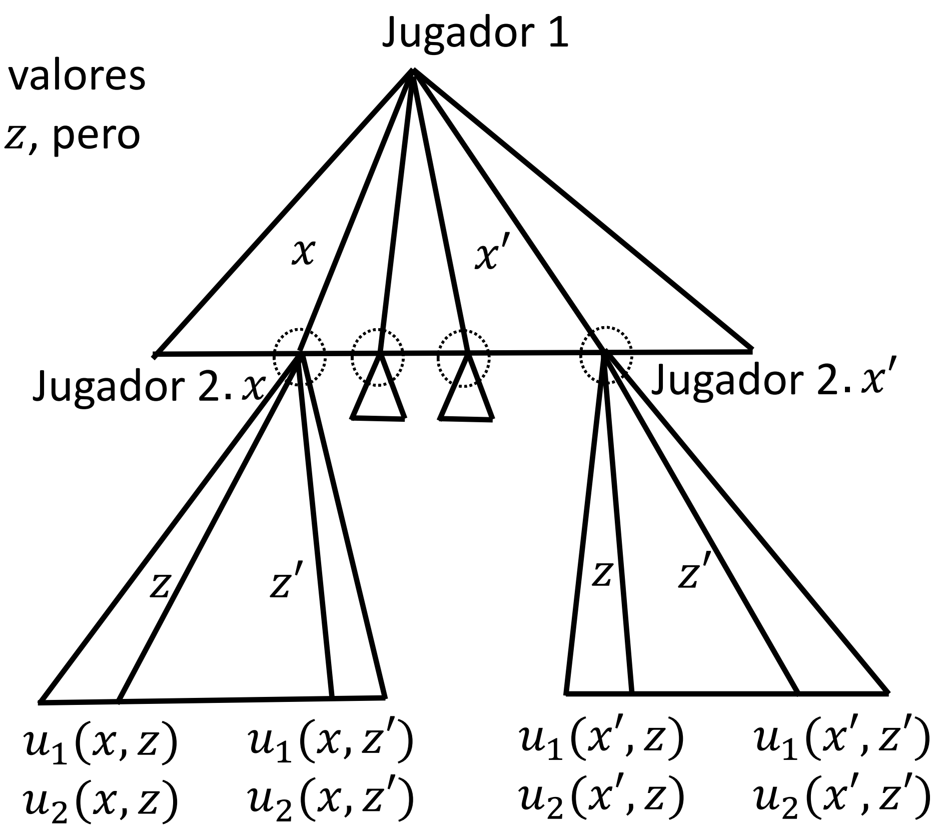
- Juegos dinámicos con información perfecta.
  - Competencia secuencial en cantidades: Stackelberg.
  - Sindicatos y empresas: la Negociación Colectiva.
  - Otras: elección de esfuerzos en una sociedad, contribuciones secuenciales a un bien público, competencia secuencial en precios, etc...
- Juegos dinámicos con información imperfecta.
  - Votaciones:
    - Votación sincera o estratégica.
    - Manipulación de la agenda.

Juegos dinámicos con información perfecta y variable continua

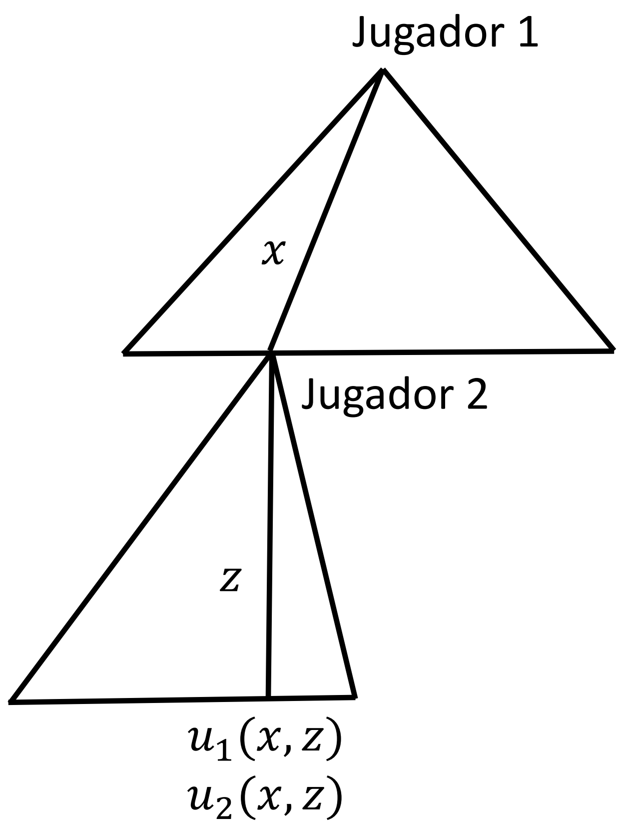
- Dos jugadores. El Jugador 1 debe elegir $x \geq 0$, y el Jugador 2 debe elegir $z \geq 0$.
- Sus pagos son: $u_1(x, z)$ y $u_2(x, z)$.
- El Jugador 1 mueve primero, y su elección será conocida por 2 antes de elegir z.
- El jugador 1 tiene un conjunto de información. Su estrategia será un número real, un valor de x.
- El jugador 2 tiene infinitos conjuntos de información (uno por cada posible valor de x).
- Una estrategia del Jugador 2 implica elegir un valor de z por cada valor observado de x. Es decir, será una función, $z = f(x)$. El conjunto de funciones posibles será el conjunto de estrategias de este jugador.

Representación esquemática de la forma extensiva con variable continua

Solo se muestran dos valores de x y dos valores de z, pero hay infinitos.

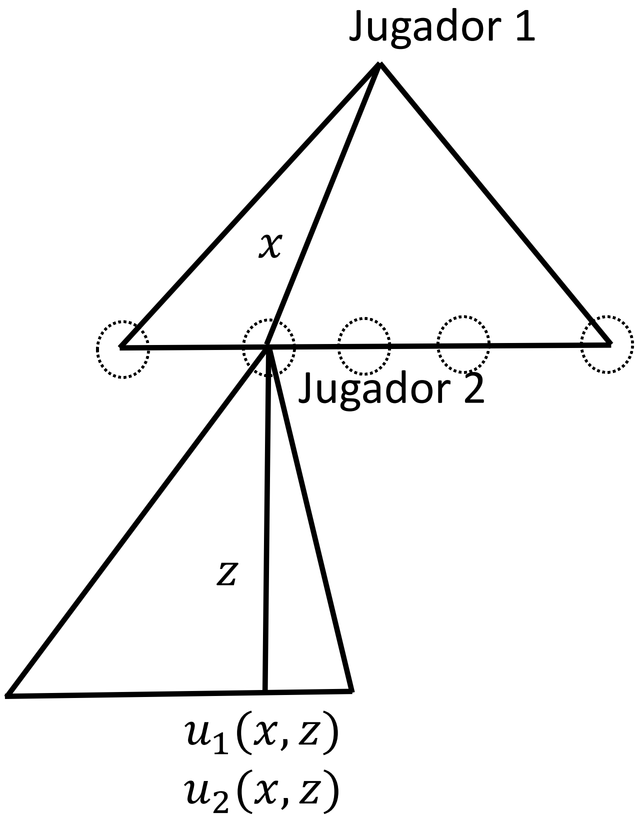


Representación esquemática de la forma extensiva con variable continua

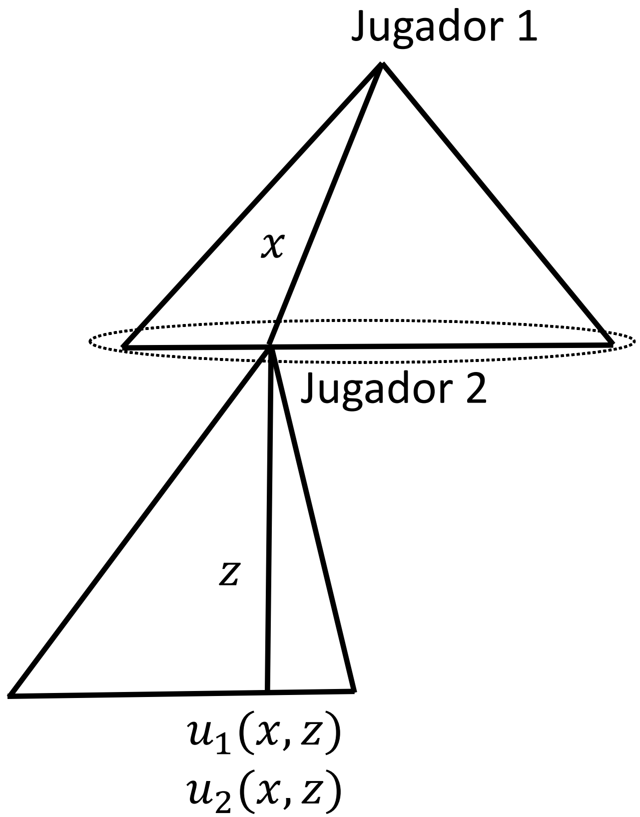


De hecho, lo normal será mostrar solo una acción genérica x y otra z.

Representación esquemática de la forma extensiva con variable continua



Información perfecta



Simultáneo

ENPS: Resolución

- Por inducción hacia atrás, comenzamos con el Jugador 2. Elegirá z para maximizar sus pagos dado el valor de x, esto es:

$$\max_{z \geq 0} u_2(x, z)$$

- De las condiciones de primer orden obtendremos la función de reacción (o función mejor respuesta): $z = f(x)$.
- Sustituimos la función de reacción de 2 en la función de pagos del Jugador 1.
- El Jugador 1 elegirá aquel valor de x que maximice sus pagos:

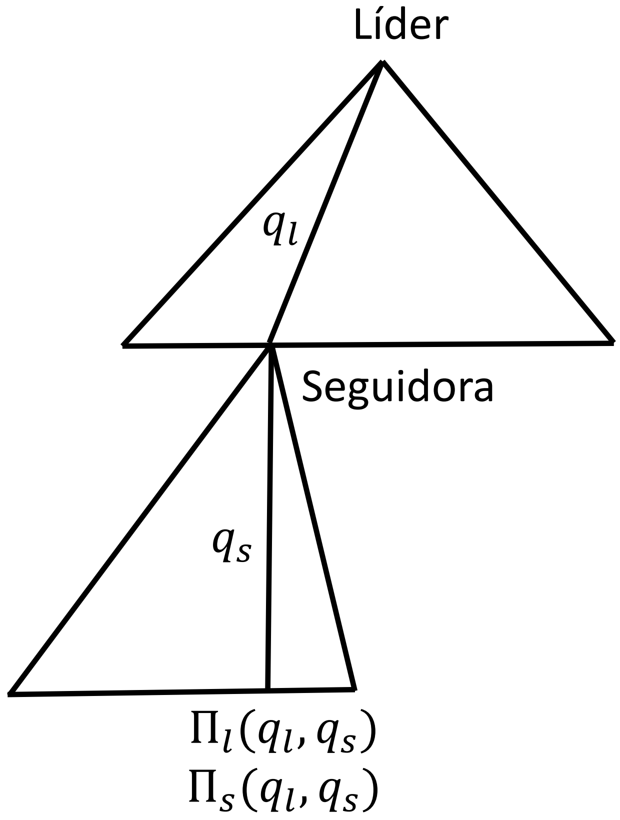
$$\max_{x \geq 0} u_1\big(x, f(x)\big)$$

- Resolviendo el problema anterior encontramos x^* como una solución.
- Entonces el ENPS será $\big(x^*, f(x)\big)$.

Modelo de Stackelberg

- 2 empresas producen un bien homogéneo.
- Demanda lineal: $p = a - Q$.
- Coste marginal constante e igual para ambas empresas: $c < a$.
- Secuencia de Decisiones:
  - La Empresa 1 (Líder) decide su producción q_l.
  - La Empresa 2 (Seguidora) observa la producción de la Líder y decide su producción q_s.
  - $Q = q_l + q_s$.
- La diferencia básica con el modelo de Cournot es que ahora las empresas toman sus decisiones de forma secuencial y no de forma simultánea.

Modelo de Stackelberg



Modelo de Stackelberg

- Conjuntos de información:
  - La empresa líder tiene un conjunto de información.
  - La seguidora tiene infinitos conjuntos de información, uno en cada vértice en que observa q_l.

- Subjuegos: Además del juego entero, hay infinitos subjuegos, uno para cada posible valor de q_l.

- Estrategias:
  - Una estrategia de la líder es una acción: un valor q_l.
  - Una estrategia para la seguidora debe tener infinitos elementos, uno para cada uno de sus conjuntos de información. La estrategia de la seguidora será por tanto una función: $q_s = f(q_l)$.

Modelo de Stackelberg

- Para encontrar el conjunto de ENPS resolvemos hacia atrás desde el último subjuego, en que el seguidor produce la cantidad que maximiza su beneficio dada la cantidad elegida previamente por la Líder:

$$\max_{q_s \geq 0} \Pi_s = (p(Q) - c)q_s = (a - q_l - q_s - c)q_s$$

- De la condición de primer orden obtendremos la mejor respuesta:

$$\frac{\partial \Pi_s}{\partial q_s} = a - q_l - 2q_s - c = 0$$

$$q_s = MR_s(q_l) = \max\left\{0, \frac{a - c - q_l}{2}\right\}$$

- Nótese que su mejor respuesta es idéntica a la que obtendríamos si el juego fuera simultáneo.

Modelo de Stackelberg

- Dada la mejor respuesta de la Seguidora, la líder maximiza sus beneficios (anticipa esa mejor respuesta y la tiene en cuenta a la hora de resolver su problema de optimización). Es decir, resolvemos hacia atrás la etapa anterior del juego:

$$\max_{q_l \geq 0} \Pi_l = (p(Q) - c)q_l = (a - q_l - q_s - c)q_l,$$

sujeto a: $q_s = \frac{a-c-q_l}{2}$.

- Sustituyendo la restricción en la función objetivo obtenemos:

$$\max_{q_l \geq 0} \Pi_l = (p(Q) - c)q_l = \left(a - q_l - \frac{a-c-q_l}{2} - c\right) q_l = \frac{a-c-q_l}{2} q_l.$$

- De la condición de primer orden obtenemos la cantidad para la Líder:

$$\frac{\partial \Pi_l}{\partial q_l} = \frac{a-c-2q_l}{2} = 0,$$

$$q_l = \frac{a-c}{2}.$$

- El único ENPS obtenido es: $\left(\frac{a-c}{2}, \max\left\{0, \frac{a-c-q_l}{2}\right\}\right)$.
- Para mayor claridad se puede escribir: $\left(q_l = \frac{a-c}{2}, q_s = \max\left\{0, \frac{a-c-q_l}{2}\right\}\right)$.

Modelo de Stackelberg

- ENPS: $\left(q_l = \frac{a-c}{2}, q_s = \max\left\{0, \frac{a-c-q_l}{2}\right\}\right)$.
- Camino de equilibrio: $\left(q_l = \frac{a-c}{2}, q_s = \frac{a-c-\frac{a-c}{2}}{2}\right) = \left(q_l = \frac{a-c}{2}, q_s = \frac{a-c}{4}\right)$
- Pagos en el equilibrio:

$$\Pi_l = \left(a - \frac{a-c}{2} - \frac{a-c}{4} - c\right)\frac{a-c}{2} = \frac{1}{8}(a-c)^2,$$

$$\Pi_s = \left(a - \frac{a-c}{2} - \frac{a-c}{4} - c\right)\frac{a-c}{4} = \frac{1}{16}(a-c)^2.$$

- Aunque las empresas tienen la misma eficiencia tecnológica, la Líder gana más que la Seguidora.
- Comparemos Stackelberg (St) con Cournot (Co):

$$q_l = \frac{a-c}{2} > q_i^{Co} = \frac{a-c}{3}, \qquad q_s = \frac{a-c}{4} < q_i^{Co} = \frac{a-c}{3}.$$

$$Q^{St} = \frac{3}{4}(a-c) > Q^{Co} = \frac{2}{3}(a-c),$$

$$p^{St} = \frac{1}{4}(a-c) + c < p^{Co} = \frac{1}{3}(a-c) + c.$$

$$\Pi_l = \frac{1}{8}(a-c)^2 > \Pi_i^{Co} = \frac{1}{9}(a-c)^2, \;\; \Pi_s = \frac{1}{16}(a-c)^2 < \Pi_i^{Co} = \frac{1}{9}(a-c)^2.$$

Ventaja de mover primero… o segundo

- Ventaja de mover primero:
  - En nuestro ejemplo de Stackelberg la función de reacción de la Seguidora es $q_s = MR_s(q_l) = \frac{a-c-q_l}{2}$, donde la cantidad depende negativamente de la cantidad elegida por la Líder.
  - En general, ocurrirá cuando las variables de decisión sean sustitutas estratégicas.
- Ventaja de mover segundo:
  - En general, ocurrirá cuando las variables de decisión sean complementarias estratégicas.
  - Por ejemplo, la competencia en precios con bienes diferenciados visto en juegos estáticos, donde el precio de una empresa depende positivamente del precio puesto por la otra: $p_i = MR_i\left(p_j\right) = \frac{a+c+bp_2}{2}$.

La Negociación Colectiva

- En una economía hay un sindicato y una empresa. El sindicato es el único proveedor de empleo y tiene poder exclusivo sobre el salario w. Por su parte, la empresa es quien decide la cantidad de trabajo L
- El objetivo del sindicato es maximizar las rentas salariales wL.
- La empresa solo usa trabajo en la producción. Elige el nivel de empleo L que maximiza su beneficio:

$$\max_L F(L) - wL$$

- Pongamos que el valor de la producción es $F(L) = 8L - \frac{L^2}{2}$.
- El juego tiene la siguiente estructura temporal:
  1. El sindicato elige el salario w.
  2. La empresa tras conocer w elige el nivel de empleo L.

La Negociación Colectiva

- Resolvemos el juego usando la inducción hacia atrás, empezando por la empresa:

$$\max_L 8L - \frac{L^2}{2} - wL$$

- De las condiciones de primer orden obtenemos $8 - L - w = 0$,
- y de ahí $L(w) = 8 - w$.
- Sustituimos la función de reacción de la Empresa en la función objetivo del sindicato:

$$\max_w wL = w(8 - w) .$$

- Condiciones de primer orden: $8 - 2w = 0$, de ahí: $w = 4$.

- ENPS: $(4, 8 - w)$.
- Camino de equilibrio: $(w = 4, L = 4)$.
- Pagos en el equilibrio: $U = 16$, $\Pi = 8$.

Votaciones

- Supongamos que en un comité parlamentario hay tres posibles propuestas de ley: *A*, *B* y *C.*
- El comité está compuesto por tres parlamentarios: 1, 2 y 3.
- El procedimiento de votación es como sigue:
  - Hay una primera ronda en la que los parlamentarios votan simultáneamente entre *A* y *B*.
  - Después, los parlamentarios votan, también simultáneamente, entre la opción que obtenga más votos en la primera ronda y la opción *C*.
  - La opción que obtenga más votos en esta segunda ronda es la que se elige.
- Las preferencias de los parlamentarios son:
  - Parlamentario 1: $A \succ C \succ B$
  - Parlamentario 2: $B \succ A \succ C$
  - Parlamentario 3: $C \succ A \succ B$
- Para hacer el problema más sencillo pongamos que la mejor opción reporta una utilidad de 3, la segunda mejor, de 2 y la tercera, de 1.

Votaciones

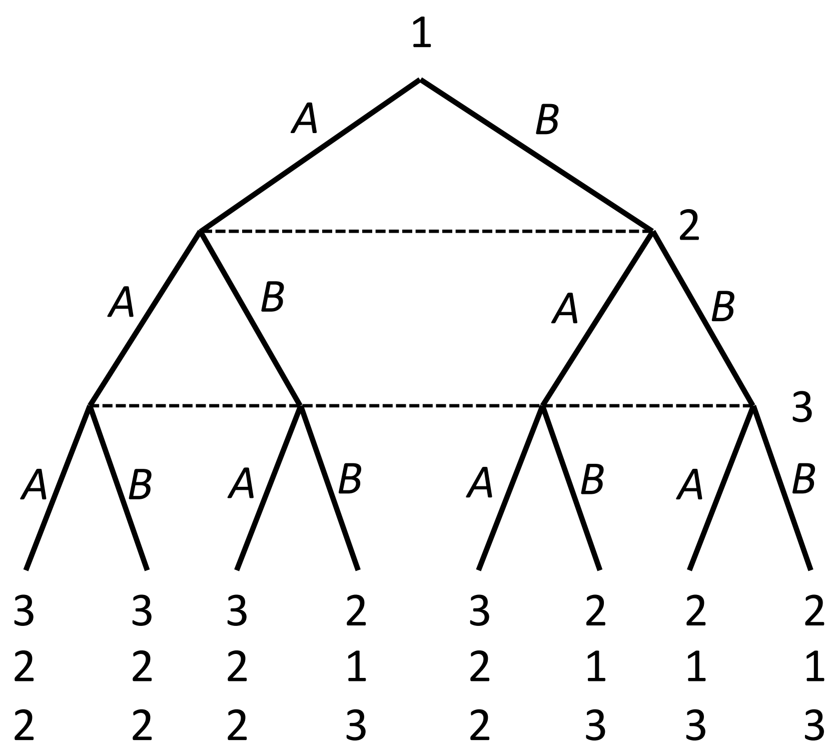
- Estamos ante un juego dinámico de información imperfecta que tiene 9 subjuegos: los 8 subjuegos que comienzan tras la primera ronda de votación (uno para cada posible combinación de votos: *AAA*, *AAB*, *ABA*, *ABB*, *BAA*, *BAB*, *BBA*, *BBB*) y el juego completo.
- La estrategia de cada jugador ha de contener 9 elementos: indicará qué votará en el etapa 1 y qué votará en cada subjuego.
- Calculamos primero los *EN* de los 8 subjuegos. Sustituimos los subjuegos por sus pagos en el *EN* y calculamos el *EN* del juego en el que los pagos son los *EN* de los subjuegos.

Votaciones

- Subjuegos:
  - Los podemos agrupar en 2 tipos: aquellos en los que ha ganado *A* y aquellos en los que ha ganado *B:*
  - *A* gana tras haber votado: *AAA, AAB, ABA, BAA* en la primera ronda.
  - *B* gana tras haber votado: *ABB, BAB, BBA, BBB* en la primera ronda.
- EN de los subjuegos:
  - Subjuegos en que ha ganado *A*.
    - Los tres parlamentarios tienen dos acciones cada uno: votar por *A* o por *C*.
    - Si suponemos que en caso de indiferencia siempre votan por su mejor opción, o, equivalentemente, si no permitimos a los jugadores usar estrategias débilmente dominadas, el *EN* es: (*A*,*A*,*C*).
    - Las utilidades son (3, 2, 2).
    - Notemos que (*A*,*A*,*A*) es un *EN* pero viola el requerimiento anterior.
  - Subjuegos en que ha ganado *B.*
    - Los tres parlamentarios tienen dos acciones: votar por *B* o por *C*.
    - Si suponemos que en caso de indiferencia siempre votan por su mejor opción, el *EN* es: (*C*,*B*,*C*).
    - Las utilidades son (2, 1, 3).

Votaciones

Sustituimos los subjuegos por sus pagos en *EN.*



EN sin estrategias débilmente dominadas: (*A*, *A*, *B*).

Votaciones

- Los otros EN son: (A, A, A), (B, B, B), pero obsérvese que en ambos hay por lo menos un jugador que usa una estrategia débilmente dominada.
- Votación estratégica en el EN (A, A, B).
  - Notemos que el parlamentario 2 vota por A en la primera ronda a pesar de que prefiere B antes que A:
    - Esto es porque sabe que, en la ronda final, si se enfrentan B a C, ganará C, que es peor que A.
    - Dicho de otra manera: votar por B en la primera ronda es como votar por C (hace que salga C en la segunda ronda).
  - De igual manera, el parlamentario 3 está votando por B en la primera votación a pesar de que prefiere A.
- Las siguientes estrategias constituyen un ENPS:
  - s_1 = (A, A si gana A, C si gana B),
  - s_2 = (A, A si gana A, B si gana B),
  - s_3 = (B, C si gana A, C si gana B).
- Camino de equilibrio: ((A, A, B), (A, A, C)).
- Pagos: (3, 2, 2), los correspondientes a “gana A”.

Manipulación de la agenda

- Consideremos el problema de votación anterior en dos etapas, pero con preferencias:
  - Parlamentario 1: $A \succ B \succ C$
  - Parlamentario 2: $B \succ C \succ A$
  - Parlamentario 3: $C \succ A \succ B$
- Si se vota, como antes, entre *A* y *B* en la primera etapa, ¿qué opción saldrá elegida?
  - Obsérvese que en la segunda etapa, entre *A* y *C*, gana C y entre *B* y *C* gana *B*. Votar por *A* en la primera ronda es como votar por *C*.
  - En la primera etapa 1 votarán por *A* quienes prefieran *C* antes que *B* (parlamentario 3), y votarán por *B* quienes prefieran *B* antes que *C* (parlamentarios 1 y 2).
  - Es decir, ganará B en la primera ronda y también en la segunda.
- Si el presidente de la comisión parlamentaria pertenece al partido del Parlamentario 1 (y por tanto tuviera sus mismas preferencias) puede alterar el orden de la votación y hacer que se vote entre *A* y *C* en la primera ronda.
  - Si gana *A*, también ganará en la segunda ronda frente a *B*. Si gana *C*, será *B* quien gane en la segunda ronda.
  - Votar por *C* es votar por *B*.
  - En la primera ronda votarán por *A* quienes prefieran *A* antes que *B* (parlamentarios 1 y 3) y votarán *C* quienes prefieran *B* antes que *A* (parlamentario 2).
  - Ganará *A* en la primera ronda y también en la segunda.