JUEGOS ESTÁTICOS

4. VARIABLE CONTINUA
Y APLICACIONES ECONÓMICAS

Universidad Carlos III de Madrid

Variable continua

- En muchos juegos las estrategias puras que pueden elegir los jugadores no son 2, 3 o cualquier otro número finito, sino que hay infinitas posibilidades.
  - Pensemos en dos oligopolistas que deben decidir qué cantidad de producto saca al mercado. El espacio de estrategias es el intervalo $[0, K_i]$, donde K_i es la capacidad de producción máxima para la Empresa *i*.
  - Una estrategia mixta es otro ejemplo de variable continua.

- Resolveremos estos juegos encontrando la función de mejor respuesta o función de reacción que nos indica qué acción escogerá un jugador para cada una de las posibles acciones de sus rivales.

(En rigor, la mejor respuesta no es, en general, una función, sino una correspondencia)

Variable continua

- Dos casos para el cálculo de la mejor respuesta:
  - Función de pagos diferenciable (ej.: problemas de competencia en cantidades, contribuciones voluntarias a un bien público).
    - La función de mejor respuesta surge de la condición de primer orden del programa de maximización (si la función objetivo es cóncava).
    - Habrá que tener en cuenta las condiciones de orden superior para otros tipos de funciones.
  - Función de pagos lineal o no diferenciable (ej.: problemas de reparto, competencia en precios).


Airbus VS Boeing
A330-300 AIRBUS
BOEING


HE Dr Chakib KHELIL
OPEC


gasNatural fenosa
IBERDROLA
endesa
edp
e.on

movistar

vodafone

orange™

Modelo de Cournot

- Competencia simultánea en cantidades: $(q_1, q_2, \dots, q_n)$.
- Producto homogéneo: $Q = \sum_{i=1}^{n} q_i$.
- Existe un precio que vacía el mercado: *p*.

Demanda directa: $Q = D(p), D'(p) < 0$

Demanda inversa: $p = p(Q)$

Costes: $C_1(q_1), \dots, C_n(q_n)$

Objetivo: $\max\limits_{q_i \geq 0} \Pi_i = p(Q)q_i - C_i(q_i)$

Modelo de Cournot

- Un bien es producido por dos empresas: 1 y 2. Las cantidades que producen son q_1 y q_2, respectivamente. Cada empresa elige su cantidad sin conocer la cantidad del rival.

- Ejemplo sencillo:
  - El precio de mercado es $p(Q) = a - Q$, donde a es una constante y $Q = q_1 + q_2$.
  - El coste de producir q_i para la empresa *i* es $C_i(q_i) = c_i q_i$.
  - Más sencillo aún: $c_1 = c_2 = c$, con $c < a$.

Modelo de Cournot

La forma normal de este juego es:

- Jugadores: {Empresa 1, Empresa 2}
- Estrategias: $S_1 = \{q_1 \in [0, \infty)\}, S_2 = \{q_2 \in [0, \infty)\}$
- Pagos:

$$u_1(q_1, q_2) = \Pi_1 = q_1(a - (q_1 + q_2)) - cq_1,$$
$$u_2(q_1, q_2) = \Pi_2 = q_2(a - (q_1 + q_2)) - cq_2.$$

- Obsérvese que los pagos son función de las estrategias $q_1 \in S_1$, $q_1 \in S_1$ (*a* y *c* son parámetros).

Modelo de Cournot

El equilibrio de Nash es:

- Un par de cantidades (q_1^*, q_2^*) tales que:

  q_1^* es la mejor respuesta de la Empresa 1 frente a q_2^*,

  q_2^* es la mejor respuesta de la Empresa 2 frente a q_1^*.

- Esto es:
  - q_1^* soluciona $\max_{q_1 \geq 0} q_1(a - (q_1 + q_2^*)) - cq_1,$
  - q_2^* soluciona $\max_{q_2 \geq 0} q_2(a - (q_1^* + q_2)) - cq_2.$

Obs.: por ser continua la estrategia y diferenciable la función que expresa los pagos, podemos encontrar la mejor respuesta usando las técnicas del cálculo diferencial.

Modelo de Cournot

Encontraremos el equilibrio de Nash a partir de las funciones mejor respuesta (también llamadas funciones de reacción):

- A partir de $\max_{q_1 \geq 0} q_1(a - (q_1 + q_2)) - cq_1$

  tenemos $a - 2q_1 - q_2 - c = 0$ si $q_1 \geq 0$:

  $$q_1 = MR_1(q_2) = \max\left\{0, \frac{a - q_2 - c}{2}\right\}.$$

- De manera análoga para la Empresa 2:

  $$q_2 = MR_2(q_1) = \max\left\{0, \frac{a - q_1 - c}{2}\right\}.$$

Obs.: se satisfacen las condiciones de segundo orden para encontrar un máximo.

Modelo de Cournot

Veamos si la solución corresponde al caso $\frac{a-q_i^*-c}{2} \geq 0$, es decir $q_i^* \leq a-c$:

- El sistema formado por las funciones mejor respuesta:

$$q_1 = \frac{a-q_2-c}{2},$$

$$q_2 = \frac{a-q_1-c}{2},$$

da como resultado

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3}.$$

(Solución positiva y menor que $a-c$, como habíamos supuesto).

Modelo de Cournot

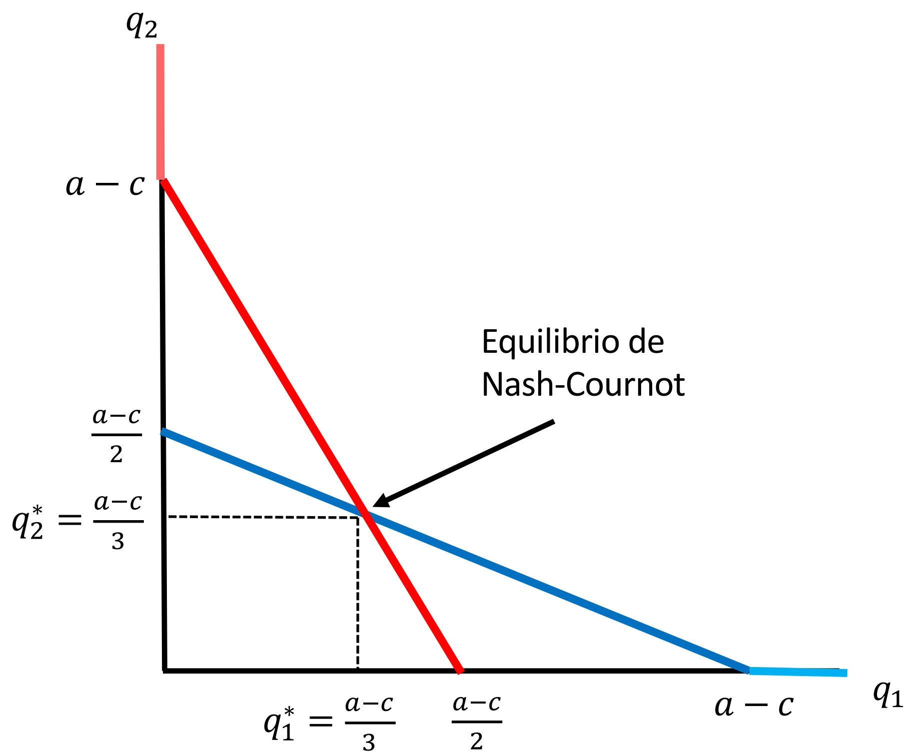
Dibujemos las funciones *MR*:

$q_1 = MR_1(q_2) = \frac{a-q_2-c}{2}$ si $q_2 \leq a - c$,

$= 0$ en otro caso.

$q_2 = MR_2(q_1) = \frac{a-q_1-c}{2}$ si $q_1 \leq a - c$,

$= 0$ en otro caso.



Modelo de Cournot

- Con más de dos empresas y costes marginales constantes e idénticos, las funciones de mejor respuesta son de la forma:

$$q_i = MR_i(q_2) = \max\left\{0, \frac{a-\sum_{j\neq i} q_j - c}{2}\right\},$$

con las que se forma un sistema de *n* ecuaciones con *n* incógnitas cuya solución es

$$q_1^* = q_2^* = \cdots = q_n^* = \frac{a-c}{n+1}.$$

- Con dos empresas y costes marginales constantes, pero distintos, las funciones mejor respuesta son de la forma:

$$q_i = MR_i(q_j) = \max\left\{0, \frac{a-q_j-c_i}{2}\right\},$$

con solución $q_i = \frac{a-2c_i+c_j}{3}.$

Modelo de Cournot

1. Precio por encima del coste marginal. (El resultado no es socialmente eficiente).

   Incentivos a reducir producción si las competidoras producen a coste marginal.

2. Precio inferior al precio de monopolio. (El resultado no es eficiente restringiéndonos al conjunto de las dos empresas).

   Incentivos a aumentar producción si las otras empresas producen la cantidad de monopolio.

3. Si el número de empresas aumenta, el precio se reduce.

   El precio tiende al coste marginal cuando el número de empresas tiende a infinito.

4. La cantidad propia disminuye con la cantidad ajena. Cuando ocurre esto en un juego, las variables estratégicas se denominan sustitutos estratégicos.

5. La cantidad propia disminuye con el coste propio y aumenta con el coste ajeno.

Modelo de Bertrand

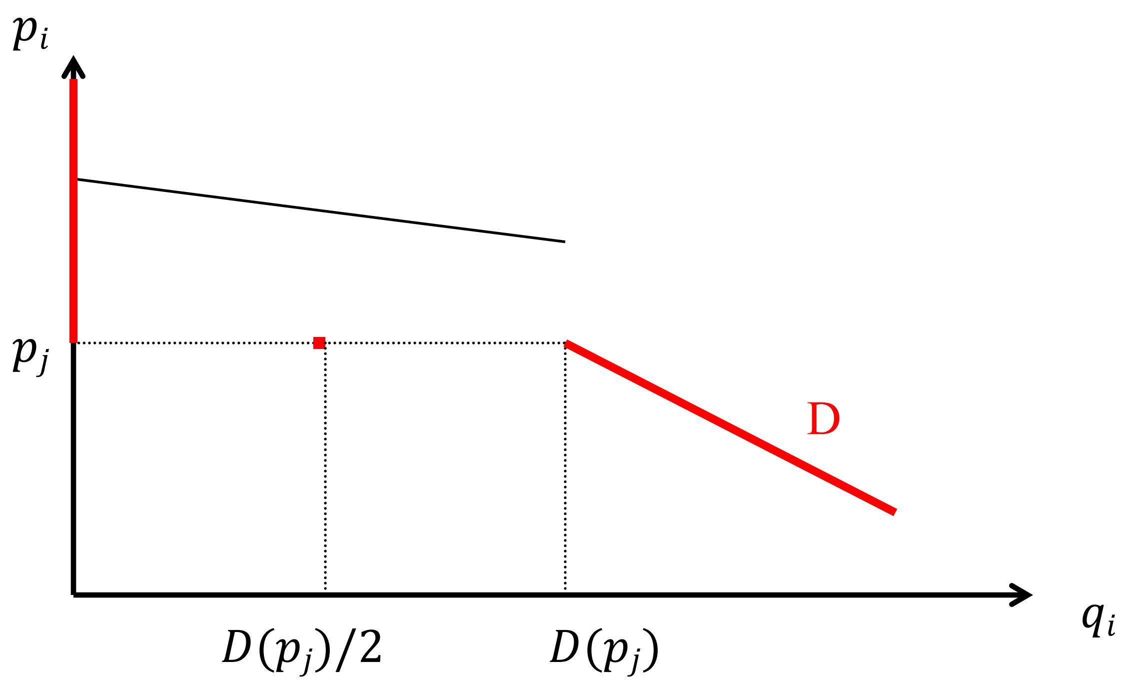
Supuestos del Modelo

1. Bien homogéneo.
2. Competencia simultánea en precios.
3. Los consumidores compran al precio menor. A igual precio, son indiferentes.
4. No hay restricciones de capacidad, ambas empresas producen cualquier cantidad a coste marginal *c*.

$$q_i = \begin{cases} D(p_i) & \text{si} \quad p_i < p_j \\ D(p_i)/2 & \text{si} \quad p_i = p_j \\ 0 & \text{si} \quad p_i > p_j \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

Función de demanda de la empresa *i* dado p_j



Nótese que es la demanda es discontinua y no podremos usar las técnicas del cálculo diferencial

Modelo de Bertrand

Forma normal con demanda $p(Q) = a - Q$ y costes marginales idénticos c.

- Jugadores: {Empresa 1, Empresa 2}
- Estrategias: $S_1 = \{p_1 \in [0, \infty)\}, S_2 = \{p_2 \in [0, \infty)\}$
- Funciones de pagos:

$$u_1(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_1 - c)(a - p_1) & \text{si} \quad p_1 < p_2 \\ (p_1 - c)(a - p_1)/2 & \text{si} \quad p_1 = p_2 \\ 0 & \text{si} \quad p_1 > p_2 \end{cases}$$

$$u_2(p_1, p_2) = \begin{cases} (p_2 - c)(a - p_2) & \text{si} \quad p_2 < p_1 \\ (p_2 - c)(a - p_2)/2 & \text{si} \quad p_2 = p_1 \\ 0 & \text{si} \quad p_2 > p_1 \end{cases}$$

Modelo de Bertrand

La función de reacción o mejor respuesta

$$p_1(p_2) = \begin{cases} c & \text{si} \quad p_2 \leq c \\ p_2 - \varepsilon & \text{si} \quad p^{monopolio} \geq p_2 > c \\ p^{monopolio} & \text{si} \quad p_2 > p^{monopolio} \end{cases}$$

$$p_2(p_1) = \begin{cases} c & \text{si} \quad p_1 \leq c \\ p_1 - \varepsilon & \text{si} \quad p^{monopolio} \geq p_1 > c \\ p^{monopolio} & \text{si} \quad p_1 > p^{monopolio} \end{cases}$$

Nótese que si $p_j \leq c$ la mejor respuesta es cualquier precio superior o igual al del rival, si $p_j < c$, la mejor respuesta es cualquier precio superior al del rival. Por simplificar, estamos suponiendo que en ese caso pone $p = c$.

Modelo de Bertrand

Encontremos el equilibrio de Nash por tanteo observando las funciones mejor respuesta:

- ¿$p_1 > p_2 > c$? No, la Empresa 1 se desviaría a un precio entre p_2 y c.
- ¿$p_1 = p_2 > c$? No, la Empresa *i* se desviaría a un precio entre p_i y c.
- ¿$p_1 > p_2 = c$? No, la Empresa 2 se desviaría a un precio entre p_2 y p_1.
- ¿$p_1 = p_2 = c$? Sí: en esa situación ganan 0, pero cualquier desviación también da beneficios 0 o negativos.

Modelo de Bertrand

- Paradoja de Bertrand:
  - Basta tener dos empresas en la industria para obtener el resultado de competencia perfecta.

- La paradoja de Bertrand surge porque la demanda y los beneficios son discontinuos.
  - Quien vende al menor precio se lleva toda la demanda.

- ¿Cómo escapar a la Paradoja de Bertrand?
  - Producto diferenciado.
  - Elección de capacidad y, luego, precio.

Competencia en precios con producto diferenciado

- Dos empresas producen bienes diferenciados. Ambas eligen precios para maximizar sus beneficios.
- Demandas lineales y costes marginales constantes.
- Sean p_1 el precio de la empresa 1 y p_2 el precio de la empresa 2. Dados estos precios, las demandas de la empresa 1 y de la empresa 2, respectivamente,

$$q_1 = a - p_1 + bp_2,$$
$$q_2 = a - p_2 + bp_1.$$

- Ambas empresas tienen unos costes marginales de producción iguales a c.

Competencia en precios con producto diferenciado

- Empresa 1 maximiza sus beneficios con respecto a su variable estratégica: su precio:

$$\max_{p_1 \geq 0} (p_1 - c)(a - p_1 + bp_2)$$

- C.P.O.: $a - 2p_1 + bp_2 + c = 0$
- Función de reacción: $p_1(p_2) = \frac{a+c+bp_2}{2}$

- Procedemos de modo análogo para la Empresa 2.
- El EN se calcula resolviendo el sistema de dos ecuaciones dadas por las funciones mejor respuesta teniendo en cuenta que los precios han de ser mayores que *c*.
- Obsérvese que si el precio de la empresa rival aumenta, la mejor respuesta es aumentar el precio propio: Los precios son complementarios estratégicos.

Contribución voluntaria a un bien público

- Dos consumidores: 1 y 2 han de decidir cuánto contribuir a un bien público, esto es c_1 (la contribución del 1) y c_2 (la del 2). El Consumidor 1 tiene riqueza w_1 y 2 tiene riqueza w_2.

- La cantidad total de bien público será la suma de las contribuciones.

- Pagos:
  - $u_1(c_1, c_2) = (c_1 + c_2)(w_1 - c_1)$,
  - $u_2(c_1, c_2) = (c_1 + c_2)(w_2 - c_2)$.

Contribución voluntaria a un bien público

- Las funciones de pagos son diferenciables:
  - $\max_{0 \leq c_1 \leq w_1} u_1(c_1, c_2) = (c_1 + c_2)(w_1 - c_1)$
  - Las CPO dan: $c_1 = \frac{w_1 - c_2}{2}$
  - De igual manera para el Consumidor 2: $c_2 = \frac{w_2 - c_1}{2}$.
- Calculamos el equilibrio resolviendo el sistema formado por las funciones de mejor respuesta, con resultado:
  - $c_1 = \frac{2w_1 - w_2}{3}, c_2 = \frac{2w_2 - w_1}{3}$.
- Es fácil mostrar que la solución no es eficiente.