Juegos estáticos

3. Estrategias mixtas

Universidad Carlos III de Madrid

La necesidad de estrategias mixtas

- Hemos visto que hay juegos que no tienen equilibrio de Nash (p.ej., “Pares y nones”)
- Es fácil ver que, en ese juego, la mejor estrategia es ser impredecible y jugar “par” y “non” con probabilidades 50:50.
- Una estrategia mixta de un jugador es justamente la elección de una estrategia según una distribución de probabilidad sobre el conjunto de sus estrategias.
- A partir de ahora usaremos los términos:
  - Estrategia pura: cada una de las originales.
  - Estrategia mixta: cada una de las distribuciones de probabilidad sobre las estrategias puras de un jugador.
  - Estrategia: cada una de las puras y las mixtas.
- Una estrategia pura puede verse como una mixta con una distribución de probabilidad degenerada.
- La definición de EN es la misma. Simplemente se amplía el conjunto de estrategias.

Nadal vs. Federer

- Saca Nadal por la izquierda o por la derecha.
- Federer decide por dónde restar, si por la izquierda o por la derecha (no le da tiempo a ver llegar la pelota).
- La probabilidad de que Nadal gane el punto depende de por dónde saca él y por dónde resta Federer:

		Federer	
		Izquierda	Derecha
Nadal	Izquierda	50 %, 50 %	90 %, 10 %
	Derecha	70 %, 30 %	50 %, 50 %

- ¿Cómo jugarán?: Equilibrio de Nash en estrategias mixtas.
- Primero veremos que deben elegir aleatoriamente.
- Luego veremos que jugar izquierda y derecha al 50 % no es EN.
- Finalmente, calcularemos el equilibrio de dos maneras distintas.

Nadal vs. Federer

- Si Nadal saca siempre por el mismo lado, Federer restará siempre por ese lado.
- Si Nadal saca con demasiada frecuencia por el mismo lado, Federer también restará siempre por ese lado.
- Si Federer resta siempre por el mismo lado, Nadal querrá sacar siempre por el otro lado.
- Cualquier situación en que uno de los dos prefiera un lado a otro no puede ser un equilibrio de Nash.
- Conclusión:
  - Nadal debe sacar de manera que Federer no pueda decidirse por un lado u otro.
  - Federer debe restar de manera que Nadal no pueda decidirse sacar por un lado u otro.

Nadal vs. Federer

- Pongamos que ambos juegan a I-D a 50-50 %.
- Desde el punto de vista de Nadal, Federer juega 50-50:
  - Si Nadal juega I gana el $\frac{1}{2}50 + \frac{1}{2}90 = 70$ % de las veces.
  - Si Nadal juega D gana el $\frac{1}{2}70 + \frac{1}{2}50 = 60$ % de las veces.
- Nadal no quiere echar a suertes entre I y D, prefiere jugar Izquierda.
- En esta situación, tampoco Federer querrá echar a suertes.
- ¿Cómo es la situación en que sí querrán echar a suertes?

Nadal vs. Federer. Cálculo del EN usando la indiferencia

- Sea q la probabilidad con la que Federer juega I (izquierda), veamos qué prefiere Nadal:

$$u_{\text{Nadal}}(L|q) = 0{,}5q + 0{,}9(1-q) = 0{,}9 - 0{,}4q,$$
$$u_{\text{Nadal}}(R|q) = 0{,}7q + 0{,}5(1-q) = 0{,}5 + 0{,}2q.$$

- Para que Nadal esté indeciso, debemos tener:

$$0{,}9 - 0{,}4q = 0{,}5 + 0{,}2q.$$
$$q = \frac{2}{3}$$

Nadal vs. Federer. Cálculo del EN usando la indiferencia

- Sea *p* la probabilidad con la que Nadal juega *I*, veamos qué prefiere Federer:

$$u_{FEDERER}(I|p) = 0{,}5p + 0{,}3(1-p) = 0{,}3 + 0{,}2p$$
$$u_{FEDERER}(D|p) = 0{,}1p + 0{,}5(1-p) = 0{,}5 - 0{,}4p$$

- Para que Federer esté indeciso, debemos tener:

$$0{,}3 + 0{,}2p = 0{,}5 - 0{,}4p$$
$$p = \frac{1}{3}.$$

- Escribiremos así el equilibrio:

(1/3[I]+2/3[D], 2/3[I]+1/3[D])

Nadal vs. Federer. Cálculo del EN usando la mejor respuesta

- Volvamos a las utilidades de Nadal:

$$u_{\text{Nadal}}(I|q) = 0{,}9 - 0{,}4q,$$
$$u_{\text{Nadal}}(D|q) = 0{,}5 + 0{,}2q.$$

- Si $q = \frac{2}{3}$ $\quad 0{,}9 - 0{,}4q = 0{,}5 + 0{,}2q$

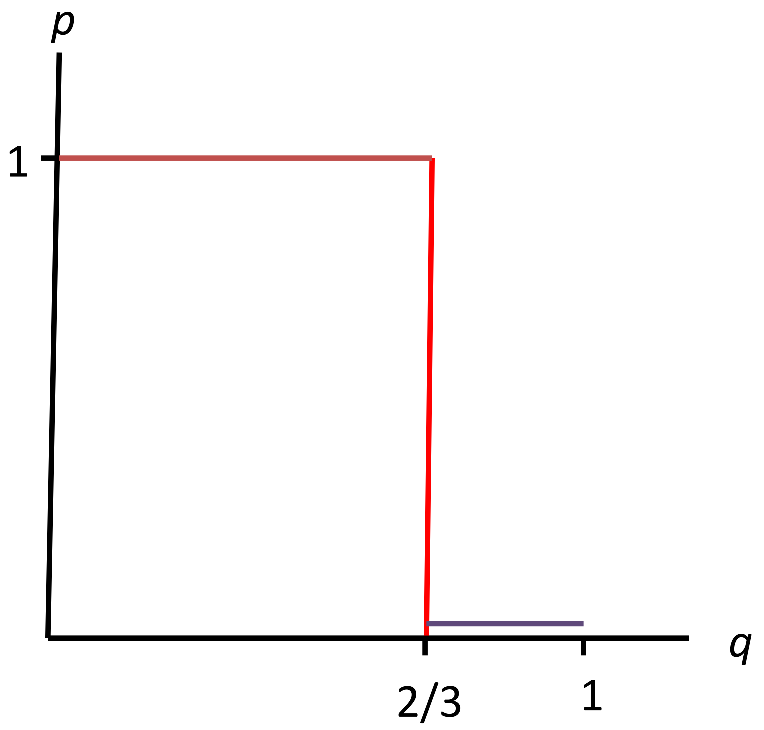
  Cualquier $p \in MR_{Nadal}(q = \frac{2}{3})$

- Si $q > \frac{2}{3}$ $\quad 0{,}9 - 0{,}4q < 0{,}5 + 0{,}2q,$

  $(p = 0) = MR_{Nadal}(q > \frac{2}{3}),$

- Si $q < \frac{2}{3}$ $\quad 0{,}9 - 0{,}4q > 0{,}5 + 0{,}2q,$

  $(p = 1) = MR_{Nadal}\left(q < \frac{2}{3}\right).$



Nadal vs. Federer. Cálculo del EN usando la mejor respuesta

- Volvamos a las utilidades de Federer:

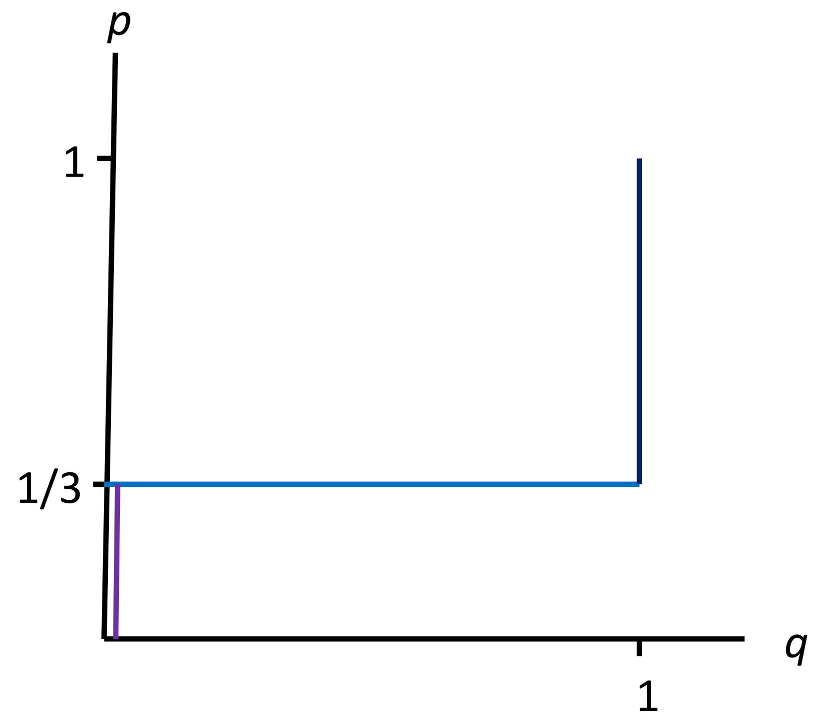
$$u_{Federer}(I|p) = 0{,}3 + 0{,}2p,$$
$$u_{Federer}(D|p) = 0{,}5 - 0{,}4p.$$

- Si $p = \frac{1}{3}$ $\quad 0{,}3 + 0{,}2p = 0{,}5 - 0{,}4p$

  Cualquier $q \in MR_{Federer}(p = \frac{1}{3})$
- Si $p < \frac{1}{3}$ $\quad 0{,}3 + 0{,}2p < 0{,}5 - 0{,}4p$

  $(q = 0) = MR_{Federer}(p < \frac{1}{3}),$
- Si $p > \frac{1}{3}$ $\quad 0{,}3 + 0{,}2p > 0{,}5 - 0{,}4p$

  $(q = 1) = MR_{Federer}\left(p > \frac{1}{3}\right).$



Nadal vs. Federer. Cálculo del EN usando la mejor respuesta

- La correspondencia mejor respuesta de Nadal nos debe decir cuál es su mejor estrategia para cada posible estrategia mixta de Federer:

$$q < \frac{2}{3} \rightarrow \ MR_{\text{Nadal}} = I \qquad (p = 1),$$

$$q = \frac{2}{3} \rightarrow \ MR_{\text{Nadal}} = p \in [0,1],$$

$$q > \frac{2}{3} \rightarrow \ MR_{\text{Nadal}} = D \qquad (p = 0).$$

- De igual manera calculamos la MR para Federer:

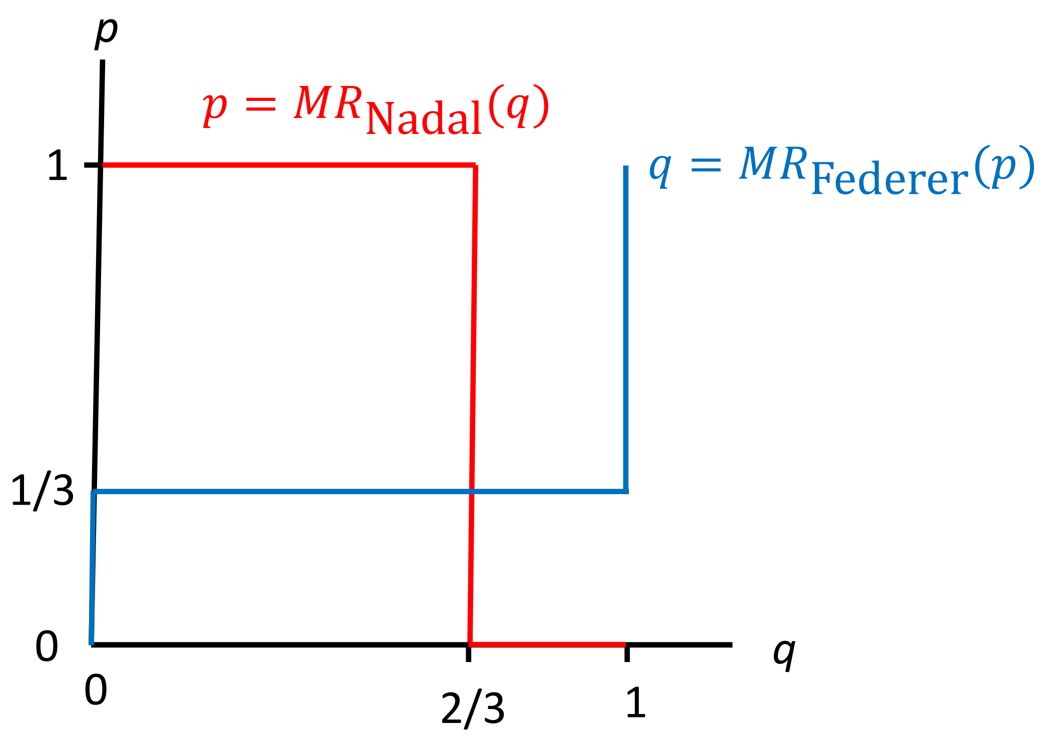
$$p < \frac{1}{3} \rightarrow \ MR_{\text{Federer}} = D \qquad (q = 0),$$

$$p = \frac{1}{3} \rightarrow MR_{\text{Federer}} = q \in [0,1],$$

$$p > \frac{1}{3} \rightarrow \ MR_{\text{Federer}} = I \qquad (q = 1).$$

Nadal vs. Federer. Cálculo del EN usando la mejor respuesta

- Veamos la MR gráficamente



Dominación con estrategias mixtas

- Una estrategia pura puede estar dominada por una estrategia mixta.

	X	Y	Z
A	1, 1	2, 2	1, 4
B	2, 2	1, 1	2, 0
C	4, 3	0, 2	4, 1

- Veamos que la estrategia B está dominada por $q[A] + (1-q)[C]$ con $q \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

Dominación con estrategias mixtas

- Veamos si alguna estrategia mixta con soporte AC domina a la estrategia B para el jugador 1.

- Una estrategia mixta con soporte AC tiene la forma $q[A] + (1-q)[C]$.

- Para que esa estrategia mixta domine a B, tiene que cumplirse
  $u_1(q[A] + (1-q)[C], s_2) > u_1(B, s_2)$ para todo s_2:

  para $s_2 = x$: $\quad q + 4(1-q) > 2,$
  para $s_2 = y$: $\quad 2q > 1,$
  para $s_2 = z$: $\quad q + 4(1-q) > 2.$

- De ahí se sigue que si $q \in \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$, entonces $q[A] + (1-q)[C]$ domina a B.