Juegos Estáticos

2. Conceptos de Solución

Universidad Carlos III de Madrid

Juego en forma normal (repaso)

- Juego estratégico estático o juego simultáneo: Cada jugador ejecuta una acción sin conocer la alternativa elegida por los demás jugadores.
- Elementos de un juego simultáneo:
  a) Conjunto de jugadores: $N = \{1, \ldots, n\}$.
  b) Conjunto de acciones/estrategias posibles S_i para cada jugador. $S = X_{i=1}^{n} S_i$.
  c) Función de utilidad (esperada) sobre cada uno de los perfiles de estrategias. Así, $u_i: S \to R$ para cada jugador *i*.
- Un juego en Forma Normal es una terna (N, S, u).

Cómo jugar

- Nos plantearemos cómo jugará un agente perfectamente racional:
  - Primer paso para estudios más realistas (no en este curso).
  - Carácter normativo (no siempre descriptivo).
- Examinaremos dos tipos de solución:
  - Estrategias racionalizables.
  - Equilibrio de Nash.

Estrategias dominadas

- Informalmente, una estrategia de un jugador está dominada si existe otra estrategia posible que proporciona al jugador un pago mayor independientemente de lo que hagan los demás jugadores.
- Un jugador racional nunca utilizará una estrategia dominada, puesto que esta conducta sería inconsistente con adoptar siempre aquellas acciones que maximizan su bienestar.

Estrategias dominadas

Formalmente se definen así:

Una estrategia $s_i \in S_i$ está dominada si existe otra estrategia $t_i \in S_i$ tal que $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ se tiene:

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i})$$

Nota: a veces se llama estrategia estrictamente dominada, pero el «estrictamente» es solo enfático.

Estrategias dominadas. Ejemplo

El dilema del prisionero

		Prisionero 2	
		C	D
Prisionero 1	C	-1, -1	-5, 0
	D	0, -5	-4, -4

- Para cualquiera de los prisioneros la estrategia Callar (C) está dominada por la estrategia Delatar (D).
- Tras eliminar las estrategias C, queda (D,D) como la solución del juego.

Estrategias racionalizables

- Sea el juego (N, S, u) en el que eliminamos todas las estrategias dominadas.
- Obtendremos un nuevo juego (N, S^1, u).
- En este nuevo juego procedemos de nuevo a eliminar estrategias dominadas. Obtenemos el juego (N, S^2, u).
- Continuamos iterativamente hasta que no podamos eliminar más estrategias dominadas.
- Si paramos en S^k, este es el conjunto de estrategias racionalizables.

Estrategias racionalizables

- El orden de eliminación de las estrategias dominadas no afecta al resultado.
- ¡Cuidado!: No se deben eliminar estrategias débilmente dominadas para encontrar las estrategias racionalizables.

Estrategias racionalizables. Ejemplo

- Consideremos el juego

	B1	B2	B3
A1	1, 1	0, 0	-1, 0
A2	0, 0	0, 6	10, -1
A3	2, 0	10, -1	-1, -1

- B3 está dominada por B1:

	B1	B2
A1	1, 1	0, 0
A2	0, 0	0, 6
A3	2, 0	10, -1

- A1 y A2 están dominadas por A3.

Estrategias racionalizables. Ejemplo

- Tras la última iteración nos queda:

	B1	B2
A3	2, 0	10, -1

- B2 está dominada por B1, de manera que {(A3, B1)} es el conjunto de estrategias racionalizables.
- En este caso solo hay un perfil en el conjunto, pero puede haber muchos.

Más sobre dominación

- Una estrategia $s_i \in S_i$ está (estrictamente) dominada si existe otra estrategia $t_i \in S_i$ tal que $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ tenemos:

$$u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(t_i, s_{-i})$$

(diremos que t_i domina a s_i).

- Una estrategia $s_i \in S_i$ está débilmente dominada si existe otra estrategia $t_i \in S_i$ tal que $\forall s_{-i} \in s_{-i}$ tenemos:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \leq u_i(t_i, s_{-i})$$

con $u_i(s_i, r_{-i}) < u_i(t_i, r_{-i})$ para algún $r_{-i} \in S_{-i}$.

(diremos que t_i domina débilmente a s_i).

- Una estrategia es dominante si domina a todas las demás.
- Una estrategia es débilmente dominante si domina débilmente a todas las demás.
- N.B.: Cada una de estas estrategias está definida para un jugador. No existe tal cosa como un vector de estrategias $s \in S$ dominado o dominante.

Equilibrio de Nash (intuiciones)

- El concepto de equilibrio de Nash identifica los perfiles de estrategias en los que ningún jugador tiene incentivos para desviarse si espera que los demás adopten las acciones que el equilibrio prescribe para ellos.
- Cada jugador tiene que estar jugando su mejor estrategia dadas las elecciones de los otros jugadores.
- Ningún jugador tiene incentivos a cambiar su estrategia unilateralmente.

Equilibrio de Nash

- Definición. Un equilibrio de Nash (EN) de un juego en forma normal G es un perfil de estrategias $s^* = (s_1^*, \ldots, s_n^*)$ tal que para cada Jugador *i* y cada estrategia $s_i \in S_i$ tenemos

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

- Interpretaciones del equilibrio de Nash:
  - Es una norma autosostenible: una vez aceptada, ningún jugador tiene incentivos para no seguirla
  - Es un perfil de expectativas que se autoconfirman: si los jugadores esperan que los demás se comporten de acuerdo con lo prescrito, entonces estas acciones ocurren como consecuencia de la conducta de los jugadores.

Equilibrio de Nash y estrategias racionalizables

- Una estrategia estrictamente dominada no puede ser nunca jugada en un equilibrio de Nash.
- El conjunto de estrategias racionalizables incluye todos los equilibrios de Nash.
- Si cada jugador tiene una única estrategia racionalizable, el conjunto de estrategias racionalizables constituye el único equilibrio de Nash.

Equilibrio de Nash. Cálculo

- Un equilibrio de Nash se caracteriza por que cada jugador responde de la mejor manera que puede frente a las estrategias de los demás jugadores.

- Para cada jugador $i \in N$ y para cada perfil de estrategias de los demás jugadores, $s_{-i} \in S_{-i}$, identificamos la estrategia (o estrategias) que maximiza la utilidad del Jugador *i*, $MR_i(s_{-i})$. Nos referimos a $MR_i(s_{-i})$ como la mejor respuesta del Jugador *i* al perfil s_{-i}.

- Esta interpretación permite reformular el concepto de equilibrio de Nash como una solución a un sistema. Si, por ejemplo, *N* = 2, el EN, $s^* = (s_1^*, s_2^*)$, resuelve el sistema:

$$s_1 \in MR_1\ (s_2)$$
$$s_2 \in MR_2(s_1)$$

Equilibrio de Nash. Cálculo

- La manera de resolver el sistema anterior depende del juego concreto:
- Si las mejores respuesta son funciones, el problema se reduce a resolver un sistema de ecuaciones (sucederá en algunos juegos en los que las estrategias están descritas por una variable continua):

$$s_1 = MR_1(s_2)$$
$$s_2 = MR_2(s_1)$$

- En otros juegos buscaremos la mejor respuesta de un jugador para cada elección de los otros. Observando las mejores respuesta que satisfacen el sistema se encuentra el equilibrio. (Puede ser difícil).
- En juegos que se pueden representar matricialmente podemos marcar la mejor respuesta de cada jugador ante lo que hacen los demás subrayando el pago de correspondiente. En aquellas entradas de la matriz donde hayamos señalado todos los pagos tendremos un equilibrio de Nash.

A continuación veremos algunos ejemplos de 3. Más adelante veremos ejemplos de 1. y 2.

Equilibrio de Nash. Ejemplos

Coordinación

		Jugador 2	
		I_2	D_2
Jugador 1	I_1	$\underline{1}$, $\underline{1}$	0, 0
	D_1	0, 0	$\underline{1}$, $\underline{1}$

$$EN = \{(I_1, I_2), (D_1, D_2)\}$$

Equilibrio de Nash. Ejemplos

Batalla de los sexos

		Jugador 2	
		F_2	B_2
Jugador 1	F_1	$\underline{2}$, $\underline{1}$	0, 0
	B_1	0, 0	$\underline{1}$, $\underline{2}$

$$EN = \{(F_1,F_2), (B_1,B_2)\}$$

Equilibrio de Nash. Ejemplos

Dilema del prisionero

		Jugador 2	
		C_2	D_2
Jugador 1	C_1	-1, -1	-4, $\underline{0}$
	D_1	$\underline{0}$, -4	$\underline{-3}$, $\underline{-3}$

$EN = \{(D_1,D_2)\}$

Equilibrio de Nash. Ejemplos

- Pares y nones

		Jugador 2	
		P_2	N_2
Jugador 1	P_1	$\underline{1}$, -1	-1, $\underline{1}$
	N_1	-1, $\underline{1}$	$\underline{1}$, -1

$$EN = \emptyset.$$