March 25, 2010

CAPÍTULO 2: LÍMITES Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES EN EL ESPACIO EUCLÍDEO

1. Producto Escalar en $\mathbb{R}^n$

Definición 1.1. Dado $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, su **producto escalar** está definido como

$$x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Ejemplo 1.2. $(2, 1, 3) \cdot (-1, 0, 2) = -2 + 6 = 4$

Observación 1.3. $x \cdot y = y \cdot x$.

Definición 1.4. Dado $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ definimos su **norma** por

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

Ejemplo 1.5. Ejemplo: $\|(-1, 0, 3)\| = \sqrt{10}$

Observación 1.6. La siguiente es la interpretación de la norma:

- La magnitud $\|x\|$ es la distancia desde x al origen.
- También podemos interpretar $\|x\|$ como la longitud del vector x.
- La magnitud $\|x - y\|$ es la distancia entre x e y.

Observación 1.7. Sea θ el ángulo entre u y v. Entonces

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$$

2. El Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$

Definición 2.1. Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, se define la **bola abierta** con centro p y radio r como el conjunto

$$B(p, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|p - y\| < r\}$$

y la **bola cerrada** con centro p y radio r como el conjunto

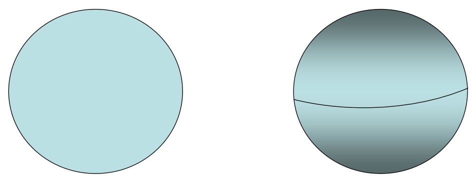
$$\overline{B(p, r)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|p - y\| \leq r\}$$

Observación 2.2.

- Recordemos que $\|p - y\|$ es la distancia de p a y.
- Para $n = 1$, se tiene que $B(p, r) = (p - r, p + r)$ y $\overline{B(p, r)} = [p - r, p + r]$.

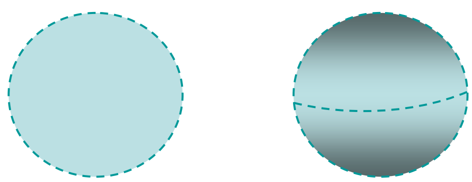
$\overline{B(p,r)}$ B(p,r)

- Para $n = 2, 3$ las bolas cerradas son



n = 2 n = 3

- Para $n = 2, 3$ las bolas abiertas son



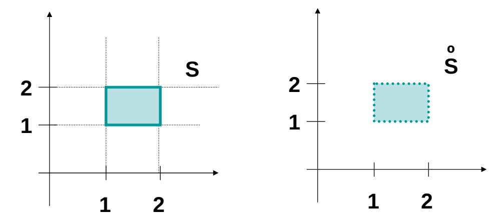
n = 2 n = 3

Definición 2.3. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que $p \in \mathbb{R}^n$ es un **punto interior** de S si existe $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset S$.

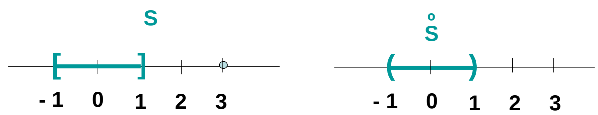
Notación: $\overset{\circ}{S}$ es el conjunto de puntos interiores de S.

Observación 2.4. Observemos que $\overset{\circ}{S} \subset S$ porque $p \in B(p, r)$ para todo $r > 0$.

Ejemplo 2.5. Consideremos $S \subset \mathbb{R}^2, S = [1, 2] \times [1, 2]$. Entonces $\overset{\circ}{S} = (1, 2) \times (1, 2)$.

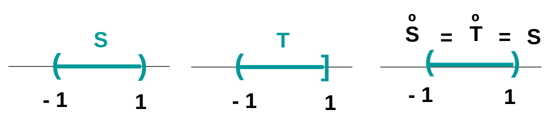


Ejemplo 2.6. Consideremos $S = [-1, 1] \cup \{3\} \subset \mathbb{R}$. Entonces $\mathring{S} = (-1, 1)$.

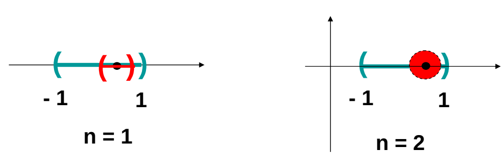


Definición 2.7. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **abierto** si $S = \mathring{S}$

Ejemplo 2.8. En $\mathbb{R}$, el conjunto $S = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ es abierto, pero $T = (-1, 1] \subset \mathbb{R}$ no lo es.



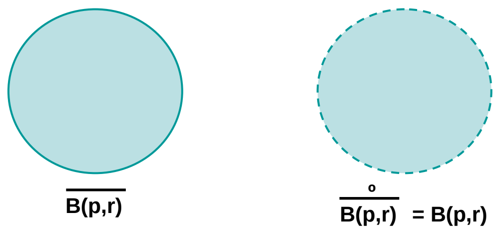
Ejemplo 2.9. El conjunto $S = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$ no es abierto en $\mathbb{R}^2$.



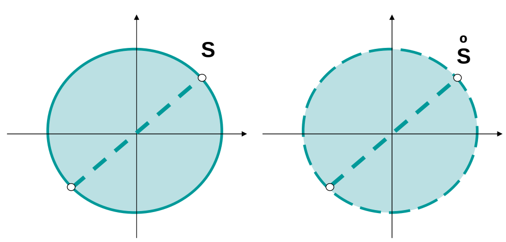
Compárese este ejemplo con el ejemplo anterior.

Ejemplo 2.10. La bola abierta $B(p,r)$ es un conjunto abierto.

Ejemplo 2.11. La bola cerrada $\overline{B(p,r)}$ no es un conjunto abierto, puesto que $\overset{\circ}{\overline{B(p,r)}} = B(p,r) \neq \overline{B(p,r)}$.



Ejemplo 2.12. Consideremos el conjunto $S = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$. Entonces $\mathring{S} = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1, x \neq y\}$. Por lo que, S no es abierto.

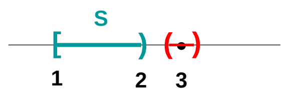


Proposición 2.13. $\mathring{S}$ es el conjunto abierto mas grande contenido en S. (Es decir, $\mathring{S}$ es un conjunto abierto, $\mathring{S} \subset S$ y si $A \subset S$ es otro conjunto abierto, entonces $A \subset \mathring{S}$).

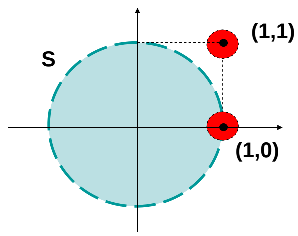
Definición 2.14. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Un punto $p \in \mathbb{R}^n$ es un **punto de clausura** de S si para cada $r > 0$ se tiene que $B(p,r) \cap S \neq \emptyset$.

Notación: $\bar{S}$ es el conjunto de puntos de clausura de S.

Ejemplo 2.15. Consideremos el conjunto $S = [1,2) \subset \mathbb{R}$. Entonces, los puntos $1, 2 \in \bar{S}$. Pero, $3 \notin \bar{S}$.

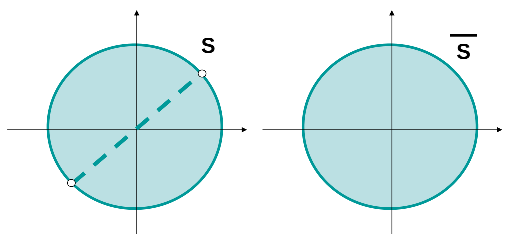


Ejemplo 2.16. Consideremos el conjunto $S = B((0,0),1) \subset \mathbb{R}^2$. Entonces, el punto $(1,0) \in \bar{S}$. Pero, el punto $(1,1) \notin \bar{S}$.



Ejemplo 2.17. Sea $S = [0,1]$, $T = (0,1)$. Entonces $\bar{S} = \bar{T} = [0,1]$.

Ejemplo 2.18. Sea $S = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$. Entonces, $\bar{S} = \overline{B((0,0),1)}$.



Ejemplo 2.19. $\overline{B(p,r)}$ es la clausura de la bola abierta $B(p,r)$.

Observación 2.20. $S \subset \bar{S}$.

Definición 2.21. Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si $F = \bar{F}$.

Proposición 2.22. Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si $\mathbb{R}^n \setminus F$ es abierto.

Ejemplo 2.23. El conjunto $[1,2] \subset \mathbb{R}$ es cerrado. Pero, el conjunto $[1,2) \subset \mathbb{R}$ no lo es.

Ejemplo 2.24. El conjunto $\overline{B(p,r)}$ es cerrado. Pero, el conjunto $B(p,r)$ no lo es.

Ejemplo 2.25. El conjunto $S = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es cerrado.

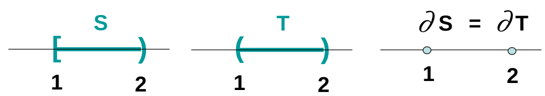
Proposición 2.26. La clausura $\bar{S}$ de S es el conjunto cerrado mas pequeño que contiene a S. (Es decir $\bar{S}$ es cerrado, $S \subset \bar{S}$ y si F es otro conjunto cerrado que contiene a S, entonces $\bar{S} \subset F$).

Definición 2.27. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, se dice que $p \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de S si para cada $r > 0$, se tiene que,

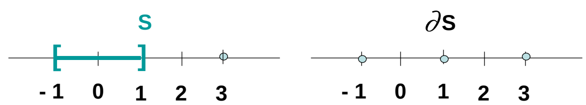
(1) $B(p,r) \cap S \neq \emptyset$.
(2) $B(p,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \emptyset$.

Notación: El conjunto de puntos frontera de S se denota por $\partial S = Fr(S)$.

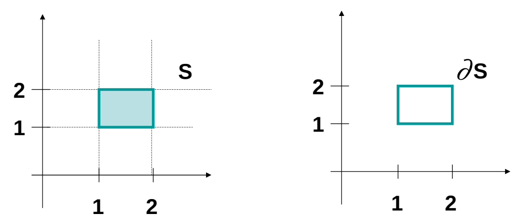
Ejemplo 2.28. Supongamos que $S = [1,2)$, $T = (1,2)$. Entonces $\partial S = \partial T = \{1,2\}$.



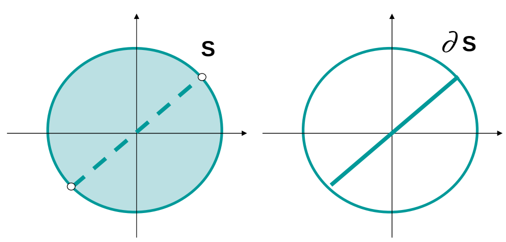
Ejemplo 2.29. Consideremos $S = [-1,1] \cup \{3\} \subset \mathbb{R}$. Entonces $\partial S = \{-1,1,3\}$.



Ejemplo 2.30. Consideremos $S \subset \mathbb{R}^2, S = [1,2] \times [1,2]$. Entonces ∂S es



Ejemplo 2.31. $S = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$. Entonces, $\partial S = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \bigcup \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x = y\}$.



La relación entre los conceptos anteriores se establece en la siguiente proposición.

Proposición 2.32. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, entonces

(1) $\mathring{S} = S \setminus \partial S$
(2) $\bar{S} = S \cup \partial S$
(3) $\partial S = \overline{S} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus S}$.
(4) S es cerrado $\Leftrightarrow S = \overline{S} \Leftrightarrow \partial S \subset S$
(5) S es abierto $\Leftrightarrow S = \mathring{S} \Leftrightarrow S \cap \partial S = \emptyset$.

Proposición 2.33.

(1) La intersección finita de conjuntos abiertos (cerrados) es un conjunto abierto (cerrado).
(2) La unión finita de conjuntos abiertos (cerrados) es un conjunto abierto (cerrado).

Definición 2.34. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe algún número real $R > 0$ y un punto $p \in \mathbb{R}^n$ tales que $S \subset B(p, R)$.

Ejemplo 2.35. La recta $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0, z = 0\}$ no es un conjunto acotado.

Ejemplo 2.36. La bola $B(p, M)$ de centro p y radio M es un conjunto acotado.

Definición 2.37. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **compacto** S si es cerrado y acotado.

Ejemplo 2.38. $S = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es compacto (es acotado pero no cerrado).

Ejemplo 2.39. $B(p, R)$ no es compacto (es acotado pero no cerrado).

Ejemplo 2.40. $\overline{B(p, R)}$ es compacto.

Ejemplo 2.41. $(0, 1]$ no es compacto. $[0, 1]$ es compacto.

Ejemplo 2.42. $[0, 1] \times [0, 1]$ es compacto.

Definición 2.43. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para cualquier $x, y \in S$ y $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que $\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \in S$.

Ejemplo 2.44. Si A es una matriz de orden $n \times m$ y $b \in \mathbb{R}^m$ definimos

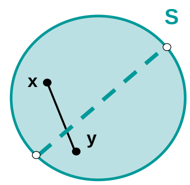
$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$$

como el conjunto de soluciones del sistema lineal $Ax = b$. Supongamos que tenemos dos soluciones del sistema $x, y \in S$, entonces se verifica que $Ax = Ay = b$. Si ahora tomamos $0 \leq t \leq 1$ (en realidad el razonamiento que sigue es válido para cualquier $t \in \mathbb{R}$) entonces

$$A(tx + (1 - t)y) = tAx + (1 - t)Ay = tb + (1 - t)b = b$$

es decir $tx + (1 - t)y \in S$ por lo que el conjunto de soluciones de un sistema lineal es un conjunto convexo.

Ejemplo 2.45. El conjunto $S = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es convexo.



3. Funciones de Varias Variables

Vamos a estudiar funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.1.

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = x + y - 1$$
o por
$$f(x, y) = x \operatorname{sen} y$$
- $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \sqrt{1 + z^2}$$
o por
$$f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2}$$
- $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y, z, t) = \operatorname{sen} x + y + ze^t.$$

A veces consideraremos funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ como por ejemplo, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por
$$f(x, y, z) = (xe^y + \operatorname{sen} z, x^2 + y^2 - z^2)$$
Pero si se define $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$ con
$$f_1(x, y, z) = xe^y + \operatorname{sen} z, \quad f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$
entonces $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$ por lo que nos centraremos sólo en funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Observación 3.2. Cuando se define
$$f(x, y, z) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$
se debe entender que $x \neq 1$. Es decir, la expresión de f define implícitamente el dominio de la función. Por ejemplo, para la función anterior es necesario que $x + y + 1 \geq 0$ y $x \neq 1$. Por tanto, consideramos implícitamente que la función $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ está definida en el dominio
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq -1, x \neq 1\}$$

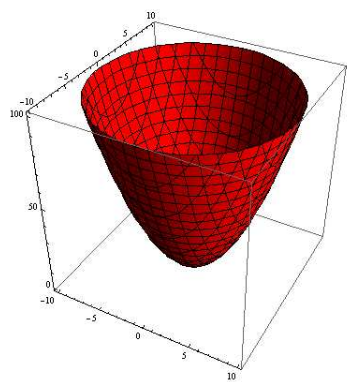
Usualmente, se define $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cuando se quiere poner de manera explícita el dominio de f.

Definición 3.3. Dado $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se define la **gráfica** (o el grafo) de f como

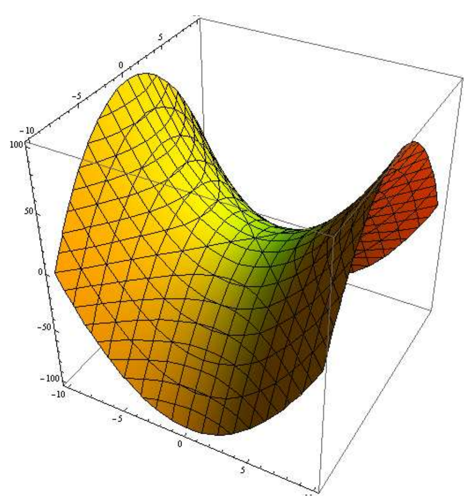
$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(x), x \in D\}$$

Observemos que se puede representar gráficamente únicamente para $n = 1, 2$.

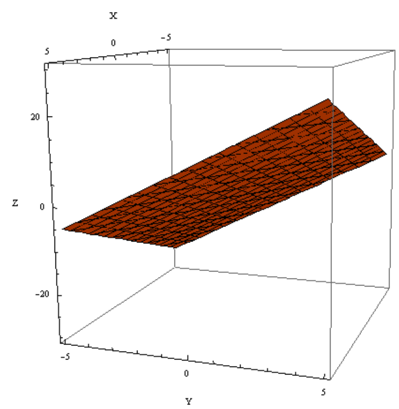
Ejemplo 3.4. La gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$ es



Ejemplo 3.5. La gráfica de $f(x, y) = x^2 - y^2$ es



Ejemplo 3.6. La gráfica de $f(x, y) = 2x + 3y$ es



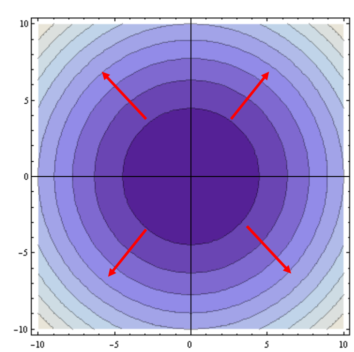
4. Conjuntos y Curvas de Nivel

Definición 4.1. Dada $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$ se define el **conjunto de nivel** de f como el conjunto

$$C_k = \{x \in D : f(x) = k\}.$$

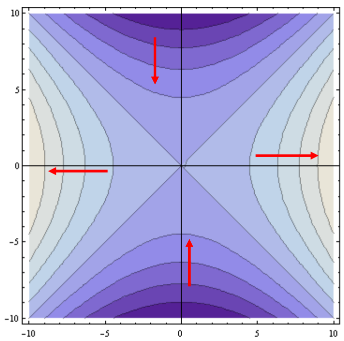
Si $n = 2$, el conjunto de nivel se llama **curva de nivel**.

Ejemplo 4.2. Las curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$ son



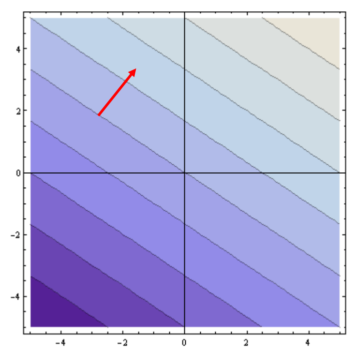
Las flechas indican la dirección en la que f crece.

Ejemplo 4.3. Las curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 - y^2$ son



Las flechas indican la dirección en la que f crece.

Ejemplo 4.4. Las curvas de nivel $f(x, y) = 2x + 3y$ son



Las flechas indican la dirección en la que f crece.

5. Límites y Continuidad

Definición 5.1. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $L \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$. Se dice que

$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$

si dado $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

siempre que $0 < \|x - p\| < \delta$.

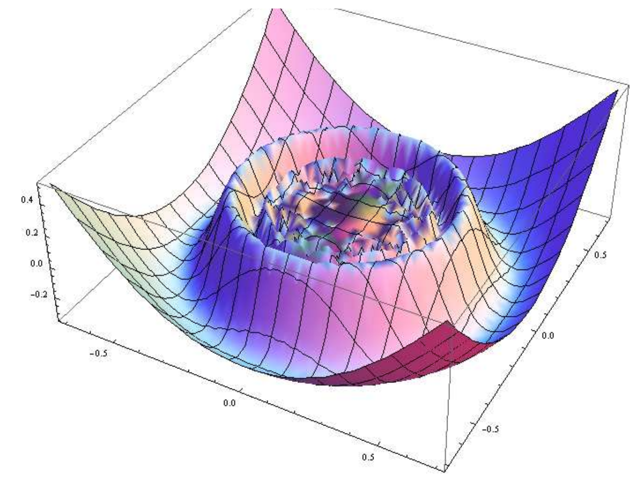
Esto es una generalización del concepto de límite de funciones de una variable a funciones de varias variables, una vez se reemplace la distancia $|\,|$ en $\mathbb{R}$ por la distancia $\|\,\|$ en $\mathbb{R}^n$). Se observa que la interpretación es la misma, e.j., $|x - y|$ es la distancia de x a y en $\mathbb{R}$ y $\|x - y\|$ es la distancia de x a y en $\mathbb{R}^n$.

Proposición 5.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y supongamos que existen dos números, L_1 y L_2 que satisfacen la anterior definición de límite. Es decir, $L_1 = \lim_{x \to p} f(x)$ y $L_2 = \lim_{x \to p} f(x)$. Entonces $L_1 = L_2$

Observación 5.3. El cálculo de límites de funciones de varias variables es más complicado que el cálculo de límites de funciones con una sola variable.

Ejemplo 5.4. Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\cos(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



Vamos a demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

En la definición de límite anterior tomamos $L = 0$, $p = (0,0)$ y tenemos que probar que dado $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,y)| < \varepsilon$$

siempre que $0 < \|(x,y)\| < \delta$, donde

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$. Si ahora se verifica que

$$0 < \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \sqrt{\varepsilon}$$

entonces,

$$x^2+y^2 < \varepsilon$$

y $(x,y) \neq (0,0)$ por lo que,

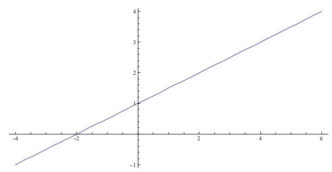
$$|f(x,y)| = \left|(x^2+y^2)\cos(\frac{1}{x^2+y^2})\right| < \varepsilon \left|\cos(\frac{1}{x^2+y^2})\right| \leq \varepsilon$$

ya que $|\cos(z)| \leq 1$ para cualquier $z \in \mathbb{R}$. El razonamiento que acabamos de hacer demuestra que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

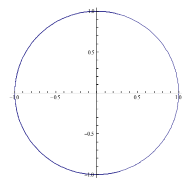
Observación 5.5. La definición anterior de límite necesita ser modificada para incluir los casos en que no existen puntos $x \in D$ (donde D es el dominio de f) tal que $0 < ||p - x|| < \delta$ Por ejemplo, cual es el $\lim_{x\to -1} \ln(x)$? Para evitar complicaciones formales, se estudiará únicamente el $\lim_{x\to p} f(x)$ para los casos en que el conjunto $\{x \in D : 0 < ||p-x|| < \delta\} \neq \emptyset$, para cada $\delta > 0$

Definición 5.6. : Una aplicación $\sigma(t) : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ se llama una **curva** en $\mathbb{R}^n$.

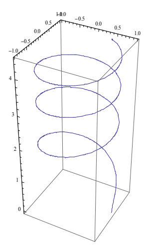
Ejemplo 5.7. $\sigma(t) = (2t, t+1), t \in \mathbb{R}$.



Ejemplo 5.8. $\sigma(t) = (cos(t), \operatorname{sen}(t)), t \in \mathbb{R}$.



Ejemplo 5.9. $\sigma(t) = (cos(t), \operatorname{sen}(t), \sqrt{t}), \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \ \mathbb{R}^3$.



Proposición 5.10. Sea $p \in D \subset \mathbb{R}^n$ y $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Consideremos una curva $\sigma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow D$ tal que $\sigma(t) \neq p$ si $t \neq 0$ y $\lim_{t\to 0} \sigma(t) = p$. Supongamos que $\lim_{x\to p} f(x) = L$. Entonces,

$$\lim_{t\to 0} f(\sigma(t)) = L$$

Observación 5.11. La anterior proposición es útil para demostrar que un límite no existe o para calcular el valor del límite si se conoce que el límite existe. Pero, no puede ser utilizada para probar que un límite existe, puesto que una de las hipótesis de la proposición es que el límite existe.

Observación 5.12. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $p = (a, b)$ consideremos las siguientes curvas

$$\sigma_1(t) = (a + t, b)$$

$$\sigma_2(t) = (a, b + t)$$

Observemos que

$$\lim_{t\to 0} \sigma_i(t) = (a, b) \ \ i = 1, 2$$

Entonces, si

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

se tiene que,

$$\lim_{x\to a} f(x, b) = \lim_{y\to b} f(a, y) = L$$

Observación 5.13. Límites Iterados

Supongamos que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ y que los siguientes límites unidimensionales

$$\lim_{x\to a} f(x,y)$$
$$\lim_{y\to b} f(x,y)$$

existen para (x,y) en una bola $B((a,b),R)$. Definimos las funciones

$$g_1(y) = \lim_{x\to a} f(x,y)$$
$$g_2(x) = \lim_{y\to b} f(x,y)$$

Entonces,

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{x\to a} g_2(x) = L$$
$$\lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b} g_1(y) = L$$

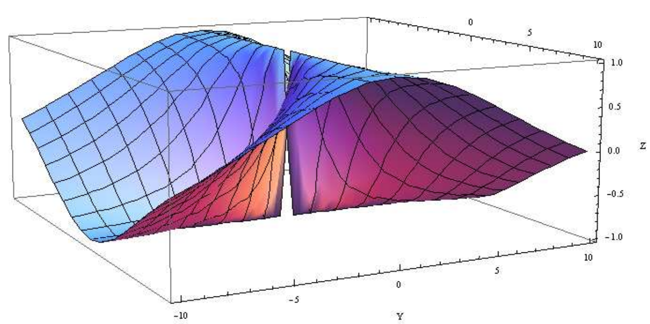
Observamos de nuevo que, es posible aplicar esta proposición para calcular el límite si se sabe de antemano que éste existe. También, si para alguna función $f(x,y)$ podemos probar que

$$\lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x,y) \neq \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x,y)$$

entonces $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ no existe. Sin embargo, las relaciones anteriores no pueden ser utilizadas para demostrar que el $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe.

Ejemplo 5.14. Consideremos la función,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$



Observemos que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = 1$$

pero,

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = -1$$

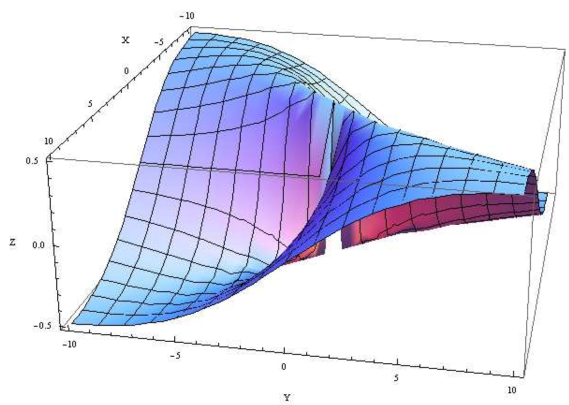
Por lo que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

no existe.

Ejemplo 5.15. Consideremos la función,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



Observemos que los límites iterados

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$$
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

coinciden. Pero al considerar la curva, $\sigma(t) = (t,t)$ y calculamos el límite

$$\lim_{t\to 0} f(\sigma(t)) = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

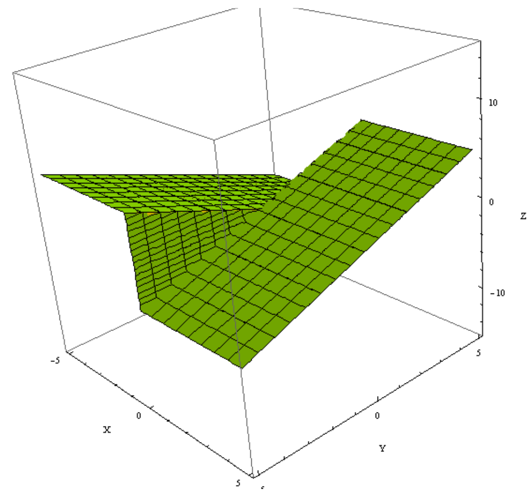
no coincide con el valor de los límites iterados. Entonces, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

no existe.

Ejemplo 5.16. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} y & \text{si } x > 0 \\ -y & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$



Vamos a demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \varepsilon$. Si $0 < ||(x,y)|| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$. Entonces,

$$|f(x,y) - 0| = |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon$$

por lo que,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

Pero, $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ no existe para $y \neq 0$ porque si $y \neq 0$ los límites por la derecha y por la izquierda,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,y) = y$$

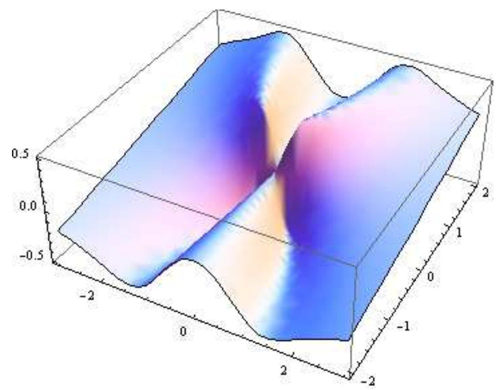
$$\lim_{x\to 0^-} f(x,y) = -y$$

no coinciden. Por tanto, el límite $\lim_{x\to 0} f(x,y)$ no existe para $y \neq 0$.

Ejemplo 5.17. Consideremos la función,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

cuyo gráfico es el siguiente



Notemos que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^4} = 0$$

pero,

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0$$

Además, si consideramos la curva $\sigma(t) = (t,t)$ y calculamos

$$\lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^4+t^2} = 0$$

vemos que este límite coincide con el valor de los límites iterados.

Así, que algunas personas podrían concluir de manera errónea que el límite siguiente existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2} = 0$$

Pero esto no es cierto...porque, si tomamos la curva $\sigma(t) = (t,t^2)$ y calculamos

$$\lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{x\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0}\frac{t^4}{t^4+t^4} = \frac{1}{2}$$

concluimos que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

no existe.

Teorema 5.18 (Álgebra de límites)**.** Consideremos dos funciones $f,g : D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ y supongamos

$$\lim_{x\to p} f(x) = L_1, \quad \lim_{x\to p} g(x) = L_2$$

Entonces,

(1) $\lim_{x\to p}(f(x)+g(x)) = L_1 + L_2$.

(2) $\lim_{x\to p}(f(x) - g(x)) = L_1 - L_2$.
(3) $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = L_1 L_2$.
(4) Si $a \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x\to p} af(x) = aL_1$.
(5) Si, además, $L_2 \neq 0$, entonces

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

6. Continuidad de Funciones

Definición 6.1. Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **continua** en un punto $p \in D$ si $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$. Se dice que una función f es continua en el conjunto $D \subset \mathbb{R}^m$ si es continua en todo punto de $p \in D$.

Observación 6.2. Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua en el punto $p \in D$ si y sólo si dado $\varepsilon > 0$, existe un número real $\delta > 0$ tal que si $x \in p$ y $\|x - p\| \leq \delta$, entonces $\|f(x) - f(p)\| \leq \varepsilon$.

Observación 6.3. Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ se puede escribir de la forma

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$$

Es posible demostrar que la función f es continua en el punto $p \in D$ si y sólo si para cada $i = 1, \dots, m$ las funcione f_i son continuas en el punto p.

En consecuencia, a partir de ahora sólo estudiaremos funciones $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

7. Operaciones con funciones continuas

Teorema 7.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas en el punto p en D. Entonces,

(1) $f + g$ es continua en el punto p.
(2) fg es continua en el punto p.
(3) Si $f(p) \neq 0$, entonces hay un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in U \cap D$ y

$$\frac{g}{f} : U \cap D \to \mathbb{R}$$

es continua en el punto p.

Teorema 7.2. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to E \subset \mathbb{R}$ una función continua en el punto $p \in D$ y sea $g : E \to \mathbb{R}^k$ una función continua en el punto $f(p)$. Entonces, $g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ es continua en el punto p.

Observación 7.3. Las siguientes funciones son continuas,

(1) Polinomios
(2) Funciones Trigonométricas y exponenciales.
(3) Logaritmos, en su dominio de definición.
(4) Potencias de funciones, en su dominio de definición.

8. Continuidad de funciones y conjuntos abiertos/cerrados

Teorema 8.1. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f : D \to \mathbb{R}^m$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) f es continua en D.
(2) Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión en D que converge al punto $p \in D$, entonces la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge al punto $f(p)$.
(3) Dado un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^m$, el conjunto $f^{-1}(U)$ es de la forma $f^{-1}(U) = G \cap D$, para algún conjunto abierto $G \subset \mathbb{R}^n$.
(4) Para cada conjunto cerrado V de $\mathbb{R}^m$, el conjunto $f^{-1}(V)$ es de la forma $f^{-1}(V) = F \cap D$, para algún conjunto cerrado $F \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 8.2. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) f es continua en $\mathbb{R}^n$.
(2) Dado un conjunto abierto U de $\mathbb{R}^m$, el conjunto $f^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^n$.
(3) Para cada conjunto cerrado V de $\mathbb{R}^m$, el conjunto $f^{-1}(V)$ es cerrado en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 8.3. Supongamos que $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones continuas. Consideremos $-\infty \le a_i \le b_i \le +\infty$, $i = 1, \dots, k$. Entonces,

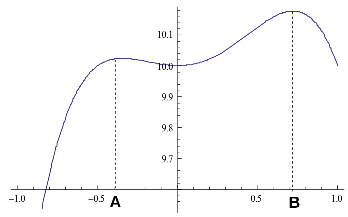
(1) El conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i < f_i(x) < b_i, \quad i = 1, \dots, k\}$ es abierto.
(2) El conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i \le f_i(x) \le b_i, \quad i = 1, \dots, k\}$ es cerrado.

9. Puntos extremos y fijos

Definición 9.1. Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que un punto $p \in D$ es un

(1) **máximo global** de f en D, si $f(x) \le f(p)$ para cualquier otro punto $x \in D$.
(2) **mínimo global** de f en D, si $f(x) \ge f(p)$ para cualquier otro punto $x \in D$.
(3) **máximo local** de f en D, si existe algún $\delta > 0$ tal que $f(x) \le f(p)$ para todo punto $x \in D \cap B(p, \delta)$.
(4) **mínimo local** de f en D, si existe algún $\delta > 0$ tal que $f(x) \ge f(p)$ para todo punto $x \in D \cap B(p, \delta)$.

Ejemplo 9.2. En el dibujo siguiente el punto A es un máximo local pero no global, mientras que el punto B es un máximo local y global.



Teorema 9.3 (Teorema de Weiestrass)**.** Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, existen $x_0, x_1 \in D$ tal que para cualquier $x \in D$

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

Es decir, x_0 es un mínimo global de f en D y x_1 es un máximo global de f en D.

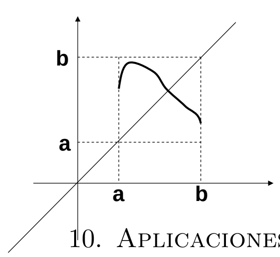
Teorema 9.4 (Teorema de Brouwer)**.** Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto, convexo y no vacío de $\mathbb{R}^n$. Sea una función $f : D \to D$ continua, entonces existe un punto $p \in D$ tal que $f(p) = p$.

Observación 9.5. Si $f(p) = p$, entonces p se denomina un **punto fijo** de f.

Observación 9.6. Observemos que

(1) Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es convexo si y sólo si es un intervalo.
(2) Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es convexo y cerrado si y sólo si es un intervalo cerrado.
(3) Un subconjunto X de $\mathbb{R}$ es convexo, cerrado y acotado si y sólo si $X = [a, b]$.

Ejemplo 9.7. Cualquier función continua $f : [a, b] \to [a, b]$ tiene un punto fijo. Gráficamente,



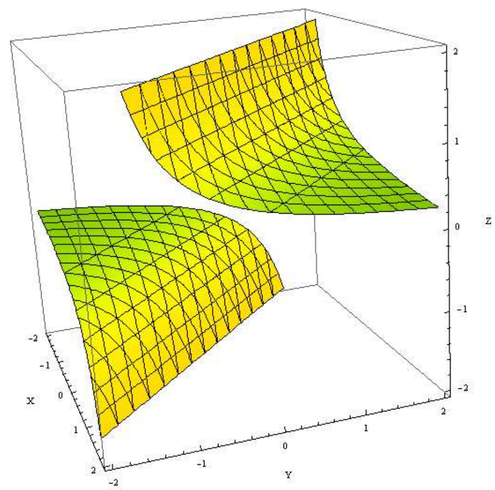
10. Aplicaciones

Ejemplo 10.1. Consideremos el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$. Como la función $f(x, y) = x^2 + y^2$ es continua, el conjunto A es cerrado. Como también está acotado, el conjunto A es compacto.

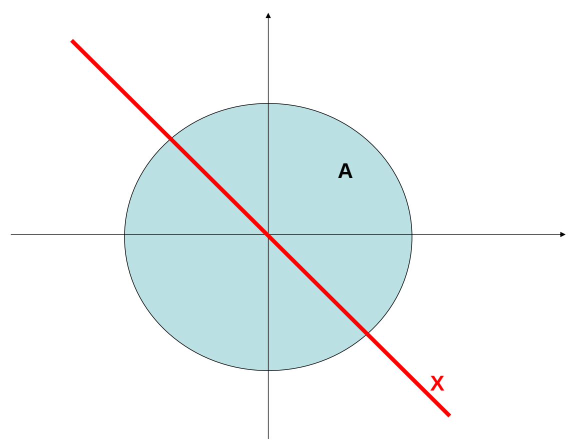
Consideremos ahora la función

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

cuya gráfica es la siguiente



La función f es continua excepto en el conjunto $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$. Este conjunto intersecta al conjunto A,



Tomando $y = 0$, vemos que

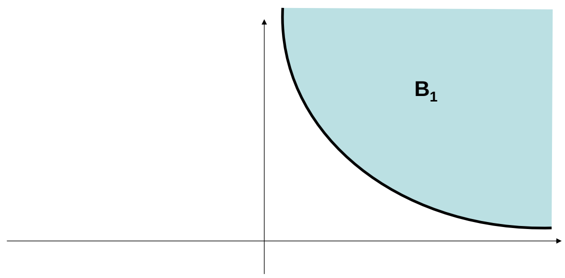
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x,0) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x,0) = -\infty$$

de donde concluimos que f no alcanza ni máximo ni mínimo en el conjunto A.

Ejemplo 10.2. Consideremos el conjunto $B_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1\}$. Como la función $f(x,y) = xy$ es continua, el conjunto B_0 es cerrado. Como no está acotado, el conjunto B_0 no es compacto.

Ejemplo 10.3. Â¿Cómo es el conjunto $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, \quad x,y > 0\}$? Ahora no podemos utilizar directamente los resultados anteriores, pero si observamos que

$$B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, \quad x,y > 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, \quad x,y \geq 0\}$$



y como las funciones $f_1(x,y) = xy$, $f_2(x,y) = x$ y $f_3(x,y) = y$ son continuas, podemos concluir que el conjunto B_1 es cerrado. Consideremos de nuevo la función

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}$$

Â¿Alcanza máximo o mínimo en el conjunto B_1? Observemos que la función es continua en el conjunto B_1, pero no podemos aplicar el Teorema de Weierstrass porque este conjunto no es compacto.

Por una parte tenemos que $f(x,y) > 0$ en el conjunto B_1. Por otro lado los puntos (n,n) para $n = 1,2,\ldots$ están en el conjunto B_1 y

$$\lim_{n\to+\infty} f(n,n) = 0$$

Por tanto, dado un punto $p \in B_1$, podemos encontrar un número natural n suficientemente grande tal que

$$f(p) > f(n,n) > 0$$

de donde concluimos que f no alcanza un mínimo en el conjunto B_1.

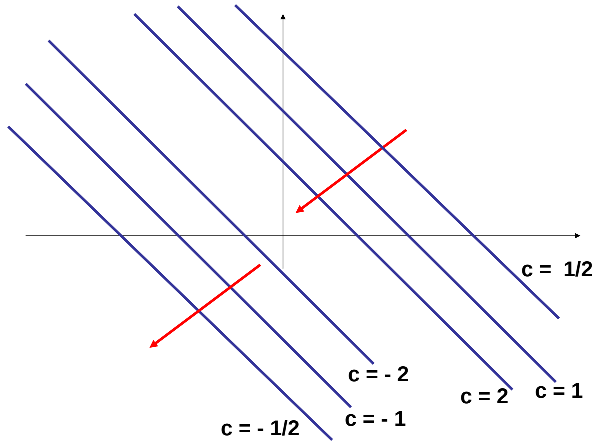
Las curvas de nivel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$ de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}$$

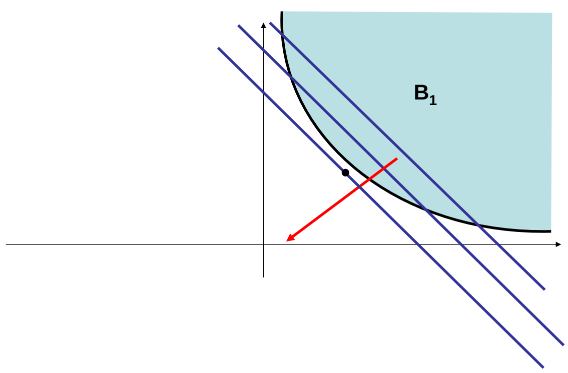
son las líneas rectas

$$x + y = \frac{1}{c}$$

Gráficamente,



Las flechas indican la dirección en la que la función crece. Gráficamente, vemos que f alcanza un máximo en el punto de tangencia con el conjunto B_1. Este punto es el punto $(1, 1)$.



Ejercicio 10.4. De forma análoga el conjunto

$$B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, \quad x, y < 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, \quad x, y \leq 0\}$$

es cerrado, pero no es compacto. Razonar que la función

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

es continua en este conjunto pero no tiene máximo. En cambio si alcanza un mínimo en el punto $(-1, -1)$.

Ejercicio 10.5. Los conjuntos $B_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1, \quad x, y > 0\}$ y $B_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 1, \quad x, y < 0\}$ son abiertos. Â¿Por qué?