

UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
Departamento de Economía

Tema 1: Matrices y sistemas de ecuaciones lineales.

Empezaremos por recordar conceptos ya conocidos de álgebra lineal como las matrices, determinantes, etc. En este capítulo, también recordaremos el método de solución de sistemas de ecuaciones lineales así como la interpretación geométrica del conjunto de soluciones.

1. MATRICES Y DETERMINANTES. RANGO DE UNA MATRIZ. MULTIPLICACIÓN Y MATRIZ INVERSA

Una matriz de orden $n \times m$ es un conjunto de $n \times m$ números reales ordenados en n filas y m columnas. Una matriz A de orden $n \times m$ se representa de la siguiente manera

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

es decir elemento a_{ij} es el que se encuentra en la fila i y la columna j . Escribiremos $A \in M_{n \times m}$. A veces nos referimos a la matriz que tiene dentro los números a_{ij} según el convenio anterior como $A = (a_{ij})_{j=1, \dots, m}^{i=1, \dots, n}$ o también $A = (a_{ij})_{ij}$.

Los elementos de la forma a_{ii} se llaman la **diagonal** de A .

Cuando una matriz tiene n filas y m columnas solemos decir que la matriz es de tipo (o tamaño) $n \times m$. En el caso de que el número de filas y de columnas es el mismo (es decir, cuando $m = n$) se dice que la matriz es **cuadrada**.

La matriz cuadrada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

se llama matriz identidad de tamaño n y se denota por I_n .

Definición 1. Dada una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{n \times m}$$

definimos la **matriz transpuesta** $A^t \in M_{m \times n}$ (ó A^*) de A , como la matriz cuya fila i es igual a la columna i de A . Es decir,

$$A^t = A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}$$

Definición 2. Dada una matriz cuadrada,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{n \times m}$$

la **traza** de A es el número real

$$\text{traza}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

1.1. Suma y producto por escalares. Las matrices del mismo tamaño se pueden **sumar**. La suma se hace sumando los elementos que se encuentran en la misma fila y columna en las dos matrices. Así si $A = (a_{ij})_{j=1, \dots, m}^{i=1, \dots, n}$ y $B = (b_{ij})_{j=1, \dots, m}^{i=1, \dots, n}$ (cómo veis las dos matrices tienen el mismo tamaño) entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{j=1, \dots, m}^{i=1, \dots, n}$$

Ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+1 & 1+4 & 3+0 \\ 9+5 & 6+(-2) & 5+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 14 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

De la misma manera se define el **producto por escalares** (números reales). Si $A = (a_{ij})_{j=1, \dots, m}^{i=1, \dots, n}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{j=1, \dots, m}^{i=1, \dots, n}$$

Ejemplo. Tomemos λ un número cualquiera y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot 2 & \lambda \cdot 1 & \lambda \cdot 3 \\ \lambda \cdot 9 & \lambda \cdot 6 & \lambda \cdot 5 \end{pmatrix}$$

Si fijamos $\lambda = 7$

$$7A = \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 & 7 \cdot 1 & 7 \cdot 3 \\ 7 \cdot 9 & 7 \cdot 6 & 7 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 7 & 21 \\ 63 & 42 & 35 \end{pmatrix}$$

La suma de matrices y el producto por escalares cumplen las siguientes propiedades que se deducen de manera muy sencilla de las definiciones anteriores:

Propiedad 3. Sean A , B y C matrices del mismo tamaño y α y β números reales cualesquiera:

- (1) $A + B = B + A$ (propiedad conmutativa).
- (2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (propiedad asociativa).
- (3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.
- (4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.
- (5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.
- (6) $(A + B)^t = A^t + B^t$.

1.2. Multiplicación de matrices. Consideremos ahora $A = (a_{ij})_{j=1, \dots, m}^{i=1, \dots, n}$ una matriz $n \times m$ y $B = (b_{ij})$ del tipo $m \times l$, es decir, el número de filas de la matriz A es igual el número de columnas de B . Este es un requisito indispensable para poder realizar el producto de las matrices $A \cdot B$.

Definition. La matriz producto $C = A \cdot B$ es una matriz que tiene n filas (el mismo número que A) y l columnas (tantas como B) de manera que el elemento

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$$

es decir, el elemento de la matriz producto que esta en posición i, j es el resultado de *multiplicar* la fila i de A por la columna j de B .

Ejemplo. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 7 & -4 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz $C = A \cdot B$ es una matriz 2×2

$$C = \begin{pmatrix} 49 & 8 \\ 13 & -18 \end{pmatrix} \quad \text{donde } 8 = 2 \cdot 6 + 1 \cdot (-4) + 5 \cdot 0$$

Atención. En general el producto de dos matrices no es conmutativo. De hecho esto es algo más fuerte, en muchos casos sólo se puede hacer uno de los dos productos y el otro no.

Por ejemplo si tomamos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

podemos hacer $A \cdot B$ pero en cambio $B \cdot A$ no se puede puesto que el número de columnas de B no coincide con el de filas de A .

Si tomamos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Propiedad 4. Si el producto AB existe, entonces también se pueden multiplicar $B^t A^t$ y se verifica que

$$(AB)^t = B^t A^t$$

1.3. Matrices equivalentes. El método de Gauss. Dada una matriz A cualquiera decimos que B es **equivalente** a A si podemos transformar A en B mediante una combinación de las siguientes operaciones:

- Multiplicar una fila de A por un número real cualquiera diferente de cero.
- Intercambiar dos filas.
- Sumar a una fila de A cualquier otra fila.

Estas tres operaciones se pueden describir mediante el producto de matrices.

- Multiplicar la fila i de una matriz $n \times m$ por un número a es equivalente a multiplicar a la izquierda por la matriz identidad aI_n en la que hemos puesto en la posición ii una a .

Por ejemplo si tomamos la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

y queremos multiplicar la fila 2 por 5, tenemos que multiplicar esta matriz por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Para intercambiar dos filas, por ejemplo la i y la j lo único que hay que hacer es multiplicar por la matriz identidad a la que le hemos cambiado la fila i por la j .

Por ejemplo si en la matriz anterior:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

queremos intercambiar la fila 1 y la fila 3 tenemos que hacer

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

- Si queremos sumar a la fila i un múltiplo a de la fila j tendremos que multiplicar a la izquierda por la matriz identidad a la que le añadimos en la fila i columna j una a

Si en la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

queremos sumarle a la fila 2 siete veces la fila 3 tenemos que hacer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$$

es decir hemos puesto un 7 en la posición 23

Definición 5. Diremos que una matriz $A \in M_{n \times m}$ es **escalonada** si se cumple lo siguiente:

- (1) Las filas no nulas están por encima de las filas nulas.
- (2) En cada fila $i = 1, \dots, m$ cualquiera, si el primer elemento no nulo es el elemento a_{ij} (es decir $a_{ij} \neq 0$ y $a_{ik} = 0$ para todo $k < j$), entonces $a_{i+1,l} = 0$ para todo $1 \leq l \leq j$.

En particular, si la matriz A está en forma escalonada, entonces si en una fila cualquiera i , el primer elemento no nulo es a_{ij} entonces $a_{kl} = 0$ para todo par $k > i, l \leq j$. En una matriz escalonada, cada fila (excepto quizás la primera fila) empieza con 0 y cada una de las filas $i + 1$ empieza con al menos un 0 más que la fila anterior i .

Por ejemplo, las matrices,

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

son matrices escalonadas. Mientras que la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

no es escalonada.

El método de Gauss nos proporciona una manera sistemática de obtener mediante cambios elementales una matriz una matriz escalonada equivalente a matriz cualquiera dada.

Funciona de la manera siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

- (1) Reordenamos las filas de manera que todas las filas de ceros, si las hay, queden abajo del todo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (2) Buscamos la primera columna que no tenga todo ceros.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (3) Reordenamos de nuevo las filas de manera que los ceros de esta columna queden abajo del todo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (4) Si la matriz ya esta escalonada ya hemos acabado.

- (5) Si no, buscamos el primer elemento donde no se cumple la condición de escalonamiento a este número le llamamos **pivote** y a partir de ahora nos olvidamos de las filas por encima de esta.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & \mathbf{3} & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (6) Repetimos los pasos anteriores olvidándonos de las filas ya escalonadas. Si la matriz ya está escalonada ya hemos acabado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (7) Si no, eliminamos todos los números que estén en la misma columna y por debajo del pivote (supongamos que es a_{ij}) que no sean cero haciendo las operaciones $a_{ij}\text{fila}_{i+k} - a_{i+k,j}\text{fila}_i$ siempre y cuando $a_{i+k,j} \neq 0$.

$$\begin{aligned} 3\text{fila}_3 - 5\text{fila}_2 & \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \mathbf{15-15} & \mathbf{0-10} & \mathbf{12-25} & \mathbf{21-35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{-10} & \mathbf{-13} & \mathbf{-14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- (8) Si la matriz ya está escalonada, ya hemos acabado, en caso contrario repetimos las operaciones anteriores sólo con las filas donde la matriz no esté escalonada.

1.4. Determinantes. A toda matriz cuadrada se le puede asociar un número llamado **determinante** de la matriz. Veremos más adelante que es muy importante y útil. Vamos a definirlo de manera inductiva.

Si A es una matriz 1×1 es decir tiene una sola fila y una sola columna entonces de hecho A es un número $A = (a)$. El determinante es entonces a .

Si A es 2×2 entonces el determinante es:

$$\det(a) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

En el caso de que A sea 3×3 tenemos dos maneras equivalentes de definir el determinante:

(1) La regla de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

(2) Desarrollando por una fila o una columna:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

No es necesario utilizar la primera fila o la primera columna. Se puede utilizar cualquiera. Hay que tener cuidado con el signo, $(-1)^{i+j}$, que lleva delante el elemento a_{ij} .

Ejemplo. Si queremos calcular

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2}2 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}3 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$-2 \cdot (-3) + 3 \cdot (0) - (1) \cdot 1 = 5$$

Para matrices de mayor tamaño el sistema es el mismo que el de matrices 3×3 . El método consiste en desarrollar por filas o columnas de manera que un determinante 4×4 equivale a calcular 4 determinantes 3×3 .

En general, si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden $n \times n$, llamaremos **menor complementario** del elemento a_{ij} de la matriz A al determinante de la submatriz de orden $n - 1 \times n - 1$ que se obtiene al eliminar la fila i y la columna j de la matriz A . El **adjunto** del elemento a_{ij} de la matriz A es el menor complementario de a_{ij} multiplicado por $(-1)^{i+j}$. Con esta notación, podemos desarrollar el determinante por la fila i ,

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{ij}A_{ij}$$

o por la columna j ,

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{ij}A_{ij}$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo. Consideremos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix}$$

Lo más interesante en este caso es desarrollar por la columna 3 o también por la fila 4. Esto es debido a que hay ceros y entonces tendremos que hacer menos cálculos. Desarrollemos por la columna 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Como veis en este ejemplo cuantos más ceros hay en una fila o columna más fácil será hacer los cálculos. Ahora explicaremos como se puede conseguir tener muchos ceros. Con las propiedades de los determinantes.

Propiedad 6. (1) Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño entonces

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

(2) Si toda una fila o toda una columna son ceros entonces el determinante es cero.

Las propiedades que vienen a continuación se deducen fácilmente de las anteriores y son las que se pueden usar para conseguir ceros en un determinante

Propiedad 7. (1) Si multiplicamos toda una fila o toda una columna por un número diferente de cero entonces el determinante se multiplica por ese número.

(2) Si intercambiamos dos filas o dos columnas entonces el determinante cambia de signo.

(3) Si a una fila le sumamos un múltiplo de otra fila entonces el determinante no cambia.

Utilizando estas tres propiedades el calculo de determinantes se simplifica mucho y el cálculo de determinantes se puede simplificar utilizando el método que hemos visto para escribir una matriz de forma escalonada.

Ejemplo. Consideremos el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 & -10 \\ 0 & 1 & -1 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -7 \\ -5 & -5 & -10 \\ 1 & -1 & -7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ -5 & -5 & -10 \\ 1 & -1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 25 \\ 0 & -2 & -14 \end{vmatrix} =$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 25 \end{vmatrix} = 50$$

1.5. Rango de una matriz.

Observación. La forma escalonada de una matriz no es única. Es decir, al llevar a cabo el método de Gauss descrito anteriormente, la matriz obtenida finalmente, depende del orden en que se realicen las operaciones. Sin embargo, se puede probar que, independientemente de los pasos realizados, el número de filas distinto de cero que se obtienen es siempre el mismo.

Definición 8. Dada una matriz cualquiera A llamamos **rango de A** al número de filas diferentes de cero que tiene la matriz en cualquiera de sus formas escalonadas.

Ejemplo. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

esta es equivalente a:

$$= \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -10 & -13 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que es una matriz escalonada, entonces el rango de A es cuatro.

Hay una definición alternativa del rango de una matriz mediante determinantes.

Propiedad 9. Sea A una matriz cualquiera. El rango de A es el tamaño del mayor determinante diferente de cero que podemos construir dentro de la matriz eliminando filas y columnas.

Ejemplo. (1) Tomemos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz es como mucho 2 ya que no se puede construir dentro un determinante 3×3 . Miremos si podemos construir uno 2×2 que no valga cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

con este no funciona.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Cómo este determinante no vale cero entonces la matriz tiene rango 2.

(2) Si ahora tomamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

entonces como antes el rango puede ser como mucho 2. Como mínimo es 1 ya que para que sea 0 toda la matriz tendría que ser cero. Veamos si es 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto el rango es 1.

Atención. El rango de dos matrices equivalentes es el mismo

1.6. Matriz Inversa. Dada una matriz cuadrada $n \times n$, A , decimos que tiene inversa si existe una matriz $n \times n$ que denotamos por A^{-1} tal que $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ donde I_n es la matriz identidad de tamaño n .

Observación. ¿Es única la matriz inversa? Es decir, ¿puede ocurrir que haya dos matrices distintas, digamos B y C tales que $BA = AB = I_n$ y además $CA = AC = I_n$? Veamos que, si estas ecuaciones se satisfacen, entonces debe ocurrir que $B = C$.

En efecto, como $CA = I_n$, multiplicando por B por la derecha obtenemos

$$(CA)B = I_n B = B$$

y como

$$(CA)B = C(AB) = CI_n = C$$

tenemos que $B = C$.

Propiedad 10. Una matriz cuadrada A tiene inversa si, y sólo si, su determinante es diferente de cero. Equivalentemente una matriz cuadrada $n \times n$ tiene inversa si y sólo si su rango es n .

De hecho de la propiedad multiplicativa de los determinantes es fácil deducir lo siguiente:

Propiedad 11. Si A tiene inversa entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Propiedad 12. Sean A y B matrices cuadradas de tamaño n . $A \cdot B$ y $B \cdot A$ tienen inversa si y sólo si A y B tienen inversa. Además

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \quad (B \cdot A)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$$

Hay diversos métodos para calcular la matriz inversa pero sin duda el más rápido e inteligible es el método de Gauss que explicamos para escalar matrices.

Si tenemos una matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Creamos la matriz

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right)$$

A toda esta matriz le aplicamos *cambios elementales* hasta que consigamos (si es que se puede lo cual es equivalente a que tenga rango máximo) que en la parte de la izquierda nos quede la identidad. En caso que sea posible obtendremos

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array} \right)$$

la matriz que tenemos ahora en la derecha es la inversa de A .

Este método funciona ya que de hecho la matriz que se obtiene en la derecha es el producto de todas las matrices por las que hay que ir multiplicando la matriz original para hacerle los cambios que nos llevan a la identidad.

Ejemplo. Consideremos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

montamos la matriz grande:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Hacemos los cambios que toquen

$$(f_3 - f_1) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) (f_3 + f_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Aquí vemos que el rango de A es 3 por lo tanto se puede invertir.

$$(2f_2 - f_3) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) (2f_1 - f_2) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Finalmente dividimos por 2

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right)$$

Por lo tanto la matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Para los fanáticos de las fórmulas, existe también una fórmula que proporciona la inversa de una matriz. Llamamos matriz adjunta de A ($\text{Adj}(A)$) a la matriz cuyos elementos son los adjuntos de A . Es decir, el elemento en la fila i y columna j de $\text{Adj}(A)$, es A_{ij} .

Proposición. Si $|A| \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}(A))^t$$

2. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Un sistema de ecuaciones lineales es sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde a_{ij} y b_k son números reales fijos y $x_1, \dots, x_n$ se llaman las incógnitas (o también variables) del sistema.

Un sistema de ecuaciones lineales se puede escribir de manera matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Una solución del sistema anterior es un vector de $\mathbb{R}^n$ que satisface la ecuación matricial. En otras palabras una solución es un vector de números reales $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ que verifican todas las ecuaciones del sistema.

Definición 13. Un sistema de ecuaciones lineales es **compatible** si tiene solución. Diremos que es **incompatible** si no tiene solución.

Un sistema de ecuaciones lineales compatible se dice que es **determinado** si tiene una única solución. Diremos que es **indeterminado** si tiene más de una (de hecho infinitas) soluciones.

Ejemplo. El sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 7 \end{cases}$$

no tiene solución, es incompatible.

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 4y = 8 \end{cases}$$

tiene como única solución el vector $(3, 2)$. Es un sistema compatible determinado.

El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

tiene infinitas soluciones. De hecho todos los vectores de la forma $(x, 4 - x)$ por lo tanto es compatible indeterminado.

2.1. El Teorema de Rouché-Frobenius. El teorema de Rouché-Frobenius nos proporciona un criterio para decidir cuando un sistema es compatible o incompatible y en el caso de que sea compatible nos dice cuantas soluciones tiene.

Por ejemplo si consideramos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

vemos fácilmente que la segunda ecuación es dos veces la primera y por lo tanto es redundante. Así el conjunto de soluciones son los vectores (x, y) de $\mathbb{R}^2$ que cumplen la condición $y = 2 - x$. Si damos un valor a la variable x entonces obtenemos un único valor de la variable y de forma que estos valores son solución del sistema. En particular, todas las soluciones del sistema son el conjunto $\{(x, 2 - x) : x \in \mathbb{R}\}$. Este conjunto se puede describir utilizando un parámetro. Decimos que hay 1 grado de libertad.

El teorema de Rouché-Frobenius nos dice exactamente cuantos parámetros (grados de libertad) son necesarios para describir la solución de un sistema compatible indeterminado.

Dado un sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

es un sistema con n incógnitas y m ecuaciones. Llamamos **matriz del sistema** a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Llamamos **matriz ampliada** del sistema a

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Teorema 14 (Teorema de Rouché-Frobenius). Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

- (1) El sistema de ecuaciones es compatible si y sólo si $\text{rg } A = \text{rg}(A|b)$.
- (2) Supongamos que el sistema de ecuaciones es compatible (por lo que, según el apartado anterior, se verifica que $\text{rg } A = \text{rg}(A|b) \leq n$). Entonces,
 - (a) El sistema es compatible determinado si y sólo si $\text{rg } A = \text{rg}(A|b) = n$.
 - (b) El sistema es compatible indeterminado si y sólo si $\text{rg } A = \text{rg}(A|b) < n$.
En este caso, el número de parámetros necesarios en la solución del sistema es $n - \text{rg}(A)$.

Ejemplo. Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + 2y + 5z = 3 \end{cases}$$

La matriz del sistema y la matriz ampliada son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{array} \right)$$

Calculamos simultáneamente el rango de A y de $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Por lo tanto el rango de A y de $(A|b)$ es 2. Así pues el sistema es compatible indeterminado. Además el número de parámetros es $3 - \text{rg } A = 1$. Así que en el conjunto de soluciones hay un parámetro.

Propiedad 15. Un sistema homogéneo (los términos independientes valen todos cero) siempre tiene como mínimo una solución.

2.2. El método de Gauss para solucionar sistemas de ecuaciones. El teorema de Rouché-Frobenius nos permite decidir cuando un sistema de ecuaciones lineales tiene o no solución. Si combinamos este método con el de Gauss (Matrices escalonadas) de matrices podremos obtener además las soluciones explícitamente. La idea es que si tenemos dos sistemas de ecuaciones con matrices ampliadas equivalentes entonces ambos sistemas tienen el mismo número de soluciones.

Por otro lado si la matriz asociada a un sistema ya es escalonada entonces es muy fácil obtener las soluciones. Daremos unos cuantos ejemplos que sirven para explicar el método. Consideremos el sistema de ecuaciones lineales que tiene como matrices asociada y ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array} \right)$$

El sistema asociado será compatible determinado. Para encontrar la solución sólo tenemos que recordar que cada columna se corresponde con una variable y que la columna después de la línea corresponde a los términos independientes. Para dar la solución vamos encontrando los valores de cada variable de abajo a arriba.

La última fila nos dice que $2z = 4$, ahora sustituimos $z = 2$ en la segunda ecuación y tenemos $y + 8 = 2$ por lo tanto $y = -6$. Finalmente con estos valores sustituimos en la primera ecuación y obtenemos que $x - 18 + 10 = 1$, es decir que $x = 9$.

Si ahora consideramos el sistema que tiene por matrices asociadas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Entonces tenemos un sistema compatible indeterminado, como el rango de A es 2 y el número de incógnitas 3 entonces tenemos un grado de libertad o, lo que es lo mismo, una variable libre. De la segunda ecuación se tiene que $y + 4z = 2$ o por lo tanto que

$$y = 2 - 4z$$

Si ahora sustituimos en la primera ecuación entonces se obtiene que $x + 3(2 - 4z) + 5z = 1$ es decir:

$$x = -5 + 7z$$

Por lo tanto el conjunto de **todas** las soluciones de nuestro sistema es

$$\{(7z - 5, 2 - 4z, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

A veces hay que tener cuidado con las variables que tomamos como libres. En el caso anterior cualquiera de las variables nos hubiese servido. En el ejemplo que sigue esto no es así.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Aquí la segunda ecuación nos dice que $y = 1$ por lo tanto esta no puede ser una variable libre. Sabiendo esto, sustituimos ahora en la primera ecuación y obtenemos $x + 4 - z = 1$, por lo tanto $x = z - 3$. Aquí las variables que se pueden tomar como libres son la x o la z . La solución general del sistema sería:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ de la forma } (z - 3, 1, z)\}$$

o si preferimos dejar todo en función de la primera variable:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ de la forma } (x, 1, x + 3)\}$$

Cómo hemos dicho antes dos sistemas con matrices asociadas equivalentes por filas tienen exactamente las mismas soluciones esto es debido a que:

- Si multiplicamos una ecuación por un número diferente de cero la ecuación no cambia.
- Si reordenamos las ecuaciones el sistema no cambia.
- Si a una ecuación le sumamos (un múltiplo de) otra ecuación el sistema no cambia.

Así pues, si dos sistemas tienen matrices equivalentes por filas la solución no cambia. El método de Gauss consiste entonces en transformar nuestro sistema en uno cuya matriz (ampliada) asociada este escalonada. Las soluciones (si las tiene) de este nuevo sistema que son fáciles de encontrar serán exactamente las soluciones del sistema original.

2.3. El método de Cramer. Supongamos ahora que tenemos un sistema de n ecuaciones y n incógnitas. Así pues la matriz del sistema es una matriz cuadrada. El sistema será compatible determinado si, y sólo si, el rango de la matriz del sistema es n o lo que es lo mismo si el determinante de la matriz del sistema es diferente de cero. El método de Cramer nos proporciona un sistema de obtener las soluciones de este tipo de sistemas mediante determinantes. Funciona así:

Consideremos un sistema compatible determinado:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ya sabemos que

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

Llamemos $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ a la única solución del sistema. Entonces:

$$x_1^* = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad x_2^* = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}} \cdots$$

$$\dots x_n^* = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

Hacemos dos observaciones sobre este método.

- Requiere mucha más operaciones que el método de Gauss.
- Es fácil (aunque nosotros no lo haremos en este curso) extender este método a sistemas compatibles indeterminados.