Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Septiembre de 2002.

Modelo 1

Apellidos:

Nombre:

DNI:

Titulación:

Grupo:

- (1) Dado el subespacio de $\mathbb{R}^3$,

1 punto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + 3z = 0, x - y + z = 0, 4x - y + 5z = 0\}$$

- (a) Hallar la dimensión de S .
(b) Hallar una base de S .
-

- (2) Dado el siguiente sistema de ecuaciones,

1 punto

$$\left. \begin{array}{l} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = b \\ x + y + az = 1 \end{array} \right\}$$

- (a) Discute el sistema para los distintos valores de a y b .
(b) Resuelve el sistema en el caso en que $a = -2$, $b = -2$.
-

- (3) Dada la matriz siguiente

1.5 puntos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Halla el polinomio característico y los autovalores.
(b) Comprueba que la matriz es diagonalizable.
(c) Halla la matriz diagonal correspondiente y la matriz de cambio de base.
-

- (4) Considera el conjunto $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq \sqrt{x}, x \geq 0\}$. **1.5 puntos**

- (a) Dibuja el conjunto y su frontera, hallando los puntos de corte de las curvas que la definen.
(b) ¿Es convexo el conjunto? Justifica la respuesta.
(c) Sea la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \ln((x - 2)^2 + (y - 2)^2)$$

Discute, enunciando los teoremas que utilices, si f alcanza máximo y/o mínimo en A .

- (5) Considera la función $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + d$.

1 punto

- (a) Sabiendo que $\nabla f(1, 0) = (2, 4)$, calcula los valores de a y c .
(b) Sabiendo, además, que la derivada direccional en $(0, 1)$ según el vector $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ es $D_u f(0, 1) = 4\sqrt{2}$, determina, si es posible, los valores de b y d .
-

- (6) Sea $f(x, y) = e^{a(x+y)} + e^{b(x-y)}$. **1.5 puntos**
- (a) Hallar el hessiano, $Hf(0, 0)$ de f en el punto $(0, 0)$.
 - (b) Discutir, según los valores de a y b , cuándo la matriz hessiana, $Hf(0, 0)$ de f en el punto $(0, 0)$, es definida positiva.
 - (c) Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de f alrededor del punto $(0, 0)$ en el caso $a = b = 1$.
-

- (7) Considera la función $f(x, y) = x^2 + y^3 - 14x - 27y$. Se pide **1'5 puntos**
- (a) Hallar los puntos críticos de f y clasificarlos.
 - (b) Hallar el mayor conjunto abierto A en el que f es estrictamente convexa y el mayor conjunto abierto B en el que f es estrictamente cóncava.
 - (c) Considera $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, ¿Alcanza f un extremo global en A ?
-

- (8) Considera la función $f(x, y) = e^{xy}$. **1 punto**
- (a) Escribe las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 8\}$.
 - (b) Calcula y clasifica los extremos de f en el conjunto A .
-