

Apellidos:

Nombre:

DNI:

Titulación:

Grupo:

(1) Dado el subespacio de $\mathbb{R}^3$

1 punto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + 3z = 0, x - y + z = 0, 4x - y + 5z = 0\}$$

- (a) Hallar la dimensión de S .
(b) Hallar una base de S .

(a) El subespacio S es el conjunto de soluciones del sistema

$$2x + y + 3z = 0$$

$$x - y + z = 0$$

$$4x - y + 5z = 0$$

La matriz asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Calculamos su rango.

Intercambiando las dos primeras filas y operando, obtenemos $\text{rg } A = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2. \text{ Por tanto, } \dim S = 3 - \text{rg } A = 1.$$

(b) Por el apartado a), vemos que el sistema que define a S es equivalente al sistema

$$x - y + z = 0$$

$$3y + z = 0$$

Usando y como parámetro, la solución es $z = -3y$, $x = y - z = y + 3y = 4y$.
Es decir $S = \{(4y, y, -3y) : y \in \mathbb{R}\}$ y una base es $\{(4, 1, -3)\}$.

(2) Dado el siguiente sistema de ecuaciones,

1 punto

$$\left. \begin{array}{rcl} ax + y + z & = & 1 \\ x + ay + z & = & b \\ x + y + az & = & 1 \end{array} \right\}$$

(a) Discute el sistema para los distintos valores de a y b .

(b) Resuelve el sistema en el caso en que $a = -2$, $b = -2$.

(a) La matriz ampliada del sistema es $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & b \\ 1 & 1 & a & 1 \end{array} \right)$. Intercambiando

las filas uno y tres, el sistema es equivalente al sistema cuya matriz am-

pliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & b \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$. Y, haciendo operaciones elementales por

filas, obtenemos los siguientes sistemas equivalentes

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 1-b \\ 0 & a-1 & a^2-1 & a-1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1-a & a-1 & 1-b \\ 0 & 0 & a^2+a-2 & a-b \end{array} \right)$$

Por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado si y sólo si $a^2 + a - 2 \neq 0$. Como las raíces de $a^2 + a - 2$ son $a = -2$ y $a = 1$, el sistema es compatible determinado si y sólo si $a \neq -2$ y $a \neq 1$.

Si $a = -2$, el sistema original es equivalente al sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & -2-b \end{array} \right)$ que es compatible indeterminado si $b = -2$ e incompatible si $b \neq -2$.

Si $a = 1$, el sistema original es equivalente al sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \end{array} \right)$ que es compatible indeterminado si $b = 1$ e incompatible si $b \neq 1$. En resumen,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } a \neq -2 \text{ y } a \neq 1 & \text{el sistema es compatible determinado,} \\ \text{Si } (a = -2 \text{ ó } a = 1) \text{ y } b = a & \text{el sistema es compatible indeterminado,} \\ \text{Si } a = -2 \text{ y } b \neq -2 & \text{el sistema es incompatible,} \\ \text{Si } a = 1 \text{ y } b \neq 1 & \text{el sistema es incompatible,} \end{array} \right.$$

(b) Sustituyendo $a = b = -2$ en el apartado anterior vemos que el sistema

es equivalente al sistema cuya matriz asociada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ es

decir es equivalente al sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y - 2z & = & 1 \\ y + z & = & 1 \end{array} \right\}$$

Elegimos el parámetro z y vemos que la solución es

$$x = z, \quad y = z + 1, \quad z \in \mathbb{R}$$

(3) Dada la matriz siguiente

1.5 puntos

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Halla el polinomio característico y los autovalores.
 (b) Comprueba que la matriz es diagonalizable.
 (c) Halla la matriz diagonal correspondiente y la matriz de cambio de base.

(a) El polinomio característico es

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2)$$

Las raíces de $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ son $\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = 1, 2$. Por lo que los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$.

(b) Como $\dim S(2) = 1$, la matriz es diagonalizable si y sólo si $\dim S(1) = 2$. Calculamos los espacios de vectores propios.

El subespacio $S(1)$ de vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -x - y = 0 \end{cases}$$

por lo que $S(1) = \{(x, -x, z) : x, z \in \mathbb{R}\} = \langle (1, -1, 0), (0, 0, 1) \rangle$. Como $\dim S(1) = 2$, la matriz es diagonalizable.

(c) Calculamos $S(2)$, el subespacio de vectores propios asociados al valor propio $\lambda_3 = 2$. El sistema que lo determina es

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \\ -z = 0 \end{cases}$$

por lo que $S(2) = \{(-2y, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \langle (-2, 1, 0) \rangle$. Por tanto, $A = PDP^{-1}$ con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x &= 0 & y &= \sqrt{x} \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{aligned}$$

- (4) Considera el conjunto $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2, y \geq \sqrt{x}, x \geq 0\}$. **1.5 puntos**

- (a) Dibuja el conjunto y su frontera, hallando los puntos de corte de las curvas que la definen.
 (b) ¿Es convexo el conjunto? Justifica la respuesta.
 (c) Sea la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \ln((x - 2)^2 + (y - 2)^2)$$

Discute, enunciando los teoremas que utilices, si f alcanza máximo y/o mínimo en A .

- (a) Los puntos de corte están determinados por los siguientes sistemas

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y = \sqrt{x} \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x = 0 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{x} \end{cases}$$

Sustituyendo $y = \sqrt{x}$ en la primera ecuación del sistema (1), obtenemos $2x^2 = 2$, de donde $x = \pm 1$. Como $x = -1$ no verifica la condición $x \geq 0$, obtenemos el punto de corte $(1, 1)$.

El sistema (2) tiene las soluciones $x = 0$ e $y = \pm\sqrt{2}$. El punto $(0, -\sqrt{2})$ no verifica la condición $y \geq \sqrt{x}$. Obtenemos el punto de corte $(0, \sqrt{2})$.

La única solución del sistema (3) es el punto de corte $(0, 0)$.

(b) El conjunto no es convexo. Los puntos de corte $(0, 0), (1, 1) \in A$ pero la combinación convexa $(1 - t)(0, 0) + t(1, 1) = (t, t) \notin A$ si $0 < t < 1$. Por ejemplo, tomando $t = 1/2$, vemos que el punto $(1/2, 1/2) \notin A$ ya que no verifica la condición $y \geq \sqrt{x}$.

(c) El argumento de la función $\ln$ es $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La función $f(x, y)$ es discontinua (no está definida) cuando $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 0$, es decir, en el punto $(2, 2)$. Como este punto no pertenece al conjunto A , porque no verifica la condición $x^2 + y^2 \leq 2$, la función es continua en A . Por el Teorema de Weierstrass, f alcanza un máximo y un mínimo en A .

(5) Considera la función $f(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy + d$.

1 punto

- (a) Sabiendo que $\nabla f(1, 0) = (2, 4)$, calcula los valores de a y c .
 (b) Sabiendo, además, que la derivada direccional en $(0, 1)$ según el vector $u = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ es $D_u f(0, 1) = 4\sqrt{2}$, determina, si es posible, los valores de b y d .

(a) El gradiente de la función f en el punto (x, y) es

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (2ax + cy, 2by + cx)$$

por lo que $(2, 4) = \nabla f(1, 0) = (2a, c)$. Igualando las componentes de los vectores, $a = 1$, $c = 4$.

(b) Por otra parte, $\nabla f(0, 1) = (c, 2b) = (4, 2b)$, de donde,

$$4\sqrt{2} = D_u f(0, 1) = u \cdot \nabla f(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \cdot (4, 2b) = \frac{1}{\sqrt{2}}(4 + 2b)$$

es decir, $4 + 2b = 8$, por lo que $b = 2$. Vemos que no es posible determinar el valor de d .

(6) Sea $f(x, y) = e^{a(x+y)} + e^{b(x-y)}$.

1.5 puntos

- (a) Hallar el hessiano, $Hf(0, 0)$ de f en el punto $(0, 0)$.
- (b) Discutir, según los valores de a y b , cuándo la matriz hessiana, $Hf(0, 0)$ de f en el punto $(0, 0)$, es definida positiva.
- (c) Calcular el polinomio de Taylor de segundo orden de f alrededor del punto $(0, 0)$ en el caso $a = b = 1$.

(a) El gradiente de la función f en el punto (x, y) es

$$\nabla f(x, y) = (ae^{a(x+y)} + be^{b(x-y)}, ae^{a(x+y)} - be^{b(x-y)})$$

de donde el hessiano de f en el punto $(0, 0)$ es

$$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} a^2e^{a(x+y)} + b^2e^{b(x-y)} & a^2e^{a(x+y)} - b^2e^{b(x-y)} \\ a^2e^{a(x+y)} - b^2e^{b(x-y)} & a^2e^{a(x+y)} + b^2e^{b(x-y)} \end{pmatrix} \Big|_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & a^2 - b^2 \\ a^2 - b^2 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

(b) Los menores principales son

$$D_1 = a^2 + b^2, \quad D_2 = |Hf(0, 0)| = 4a^2b^2$$

Vemos que si $a \neq 0$ y $b \neq 0$ entonces $D_1, D_2 > 0$ y la matriz es definida positiva. Mientras que si alguno de ellos es 0, entonces $D_2 = 0$. Como D_2 es el producto de los valores propios, alguno de ellos debe anularse y la matriz no puede ser definida (positiva o negativa). Por tanto, la matriz es definida positiva si y sólo si $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

(c) El polinomio de Taylor de orden 2 de f alrededor del punto $(0, 0)$ es

$$\begin{aligned} P_2(x, y) &= f(0, 0) + \nabla f(0, 0) \cdot (x, y) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} Hf(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= 2 + (a+b)x + (a-b)y + \frac{1}{2} ((a^2 + b^2)x^2 + 2(a^2 - b^2)xy + (a^2 + b^2)y^2) \\ &= 2 + 2x + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

- (7) Considera la función $f(x, y) = x^2 + y^3 - 14x - 27y$. Se pide **1'5 puntos**
- (a) Hallar los puntos críticos de f y clasificarlos.
 - (b) Hallar el mayor conjunto abierto A en el que f es estrictamente convexa y el mayor conjunto abierto B en el que f es estrictamente cóncava.
 - (c) Considera $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, ¿Alcanza f un extremo global en A ?

- (a) El gradiente de la función f en el punto (x, y) es

$$\nabla f(x, y) = (2x - 14, 3y^2 - 27)$$

El punto (x, y) es un punto crítico si $\nabla f(x, y) = (0, 0)$, es decir si $x = 7$ e $y^2 = 9$. Por tanto, los puntos críticos son $(7, 3)$ y $(7, -3)$.

El hessiano de f es $Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$. Entonces,

$$Hf(7, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

que, claramente, es definida positiva, por lo que el punto $(7, 3)$ es un mínimo local estricto. Por otra parte,

$$Hf(7, -3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$$

que es indefinida, por lo que el punto $(7, -3)$ es un punto de silla.

- (b) En el apartado anterior hemos calculado el hessiano de f . Vemos que $D_1 = 2 > 0$, mientras que $D_2 = 6y$ que es mayor que 0 si y sólo si $y > 0$. Concluimos que $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Como $D_1 > 0$ en todos los puntos del plano, el hessiano no puede ser definido negativo. Es decir, $B = \emptyset$.

- (c) El punto crítico $(7, 3)$ calculado en el apartado (a) se encuentra en el conjunto convexo A , en donde la función es convexa. Por tanto, el punto $(7, 3)$ es un mínimo global de f en el conjunto A .

Los puntos de la forma $(x, 1)$ están en el conjunto A para todo valor de $x \in \mathbb{R}$. Observando que $f(x, 1) = x^2 - 14x - 26$, $x \in \mathbb{R}$, no está acotada superiormente, vemos que f no tiene máximos en A .

(8) Considera la función $f(x, y) = e^{xy}$.

1 punto

- (a) Escribe las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 8\}$.
 (b) Calcula y clasifica los extremos de f en el conjunto A .

(a) El Lagrangiano es $L(x, y) = e^{xy} + \lambda(8 - x^2 - y^2)$. Las ecuaciones de Lagrange son,

$$\frac{\partial L}{\partial x} = ye^{xy} - 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = xe^{xy} - 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 = 8$$

(b) Multiplicando la primera ecuación por x y la segunda por y , obtenemos

$$xye^{xy} - 2\lambda x^2 = 0$$

$$xye^{xy} - 2\lambda y^2 = 0$$

por lo que $\lambda x^2 = \lambda y^2$.

Si $\lambda = 0$, entonces las ecuaciones de Lagrange son

$$xye^{xy} = 0$$

$$xye^{xy} = 0$$

$$x^2 + y^2 = 8$$

Como $e^{xy} \neq 0$, las dos primeras ecuaciones implican que $x = y = 0$, pero estos valores son incompatibles con la última ecuación.

Concluimos que $\lambda \neq 0$ y que $x^2 = y^2$, es decir $y = \pm x$. Sustituyendo $y^2 = x^2$ en la restricción obtenemos que $2x^2 = 8$, es decir, $x = \pm 2$. Los puntos críticos son $(2, 2)$, $(2, -2)$, $(-2, 2)$ y $(-2, -2)$. Calculamos el valor de la función en esos puntos,

$$f(2, 2) = f(-2, -2) = e^4$$

$$f(2, -2) = f(-2, 2) = e^{-4}$$

Vemos que $(2, 2)$ y $(-2, -2)$ son máximos, mientras que $(2, -2)$ y $(-2, 2)$ son mínimos.