(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax-2y+z & = & 1 \\ x+ay+2z & = & a \\ x+z & = & 1 \end{array}\right.$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante.

(a) Clasificar el sistema según los valores de a.

(b) Resolver el sistema anterior para los valores de a para los cuales el sistema es compatible indeterminado. ¿Cuántos parámetros son necesarios para describir la solución?

---

(2) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & a \end{pmatrix}$$

(a) Hallar el polinomio característico y los valores propios (o autovalores) de la matriz A.

(b) Hallar para qué valores del parámetro a, la matriz es diagonalizable.

(c) Para $a = 0$, hallar la matriz diagonal correspondiente y la matriz de cambio de base.

---

(3) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$f(x,y,z) = (x+y-z, 2x+y+z, 3x+2y, -x-2z)$$

(a) Escribir la matriz asociada a f (respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^4$). Calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen de f.

(b) Utilizando el número mínimo de ecuaciones necesarias, escribir un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que determinen el núcleo y un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que determinen la imagen de f.

(c) Hallar una base de la imagen de f y una base para el núcleo de f.

---

(4) Sea el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0; \ln(xy) \geq 0\}$.

(a) Dibujar el conjunto A, su frontera y su interior, y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.

(b) Considerar la función $f(x,y) = x + 2y$. ¿Se puede utilizar el teorema de Weierstrass para determinar si esta función alcanza un máximo y/o un mínimo en el conjunto A? Dibujar las curvas de nivel de f, indicando la dirección de crecimiento de la función.

(c) Utilizando las curvas de nivel de $f(x,y)$, determinar gráficamente (sin utilizar, por tanto, las condiciones de primer orden) los extremos absolutos de la función f en el conjunto A.

---

(5) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \left\{\begin{array}{ll} \frac{xye^x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{array}\right.$$

(a) Estudiar si la función f es continua en el punto $(0,0)$. Estudiar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es continua la función f.

(b) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$, en caso de que existan. ¿Es diferenciable la función en el punto $(0,0)$?

---

(6) Clasificar la forma cuadrática

$$Q(x,y,z) = 3x^2 + 3y^2 + 57z^2 - 6axy$$

en función de los valores del parámetro a.

---

(7) Dada la función

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$$

(a) Obtener los puntos críticos de la función y clasificarlos.

(b) Determinar los conjuntos convexos y abiertos de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es cóncava y los conjuntos convexos y abiertos de $\mathbb{R}^2$ donde es convexa.

(c) Estudiar si f tiene extremos absolutos en $\mathbb{R}^2$.

---

(8) Considerar la función

$$f(x, y, z) = 4x + 2y + z$$

y el conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 21\}$$

(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.
(b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange.
(c) Clasificar los puntos críticos encontrados en el apartado anterior, utilizando las condiciones de segundo orden del Lagrangiano.