Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Septiembre de 2008.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor compruebe que hay 14 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPAR LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale $0'5$ puntos.
- Hay espacio adicional al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Total	

(1) *Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales*

$$\begin{cases} ax - 2y + z &= 1 \\ x + ay + 2z &= a \\ x + z &= 1 \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante.

(a) *Clasificar el sistema según los valores de a.*

(b) *Resolver el sistema anterior para los valores de a para los cuales el sistema es compatible indeterminado. ¿Cuántos parámetros son necesarios para describir la solución?*

Solución:

(a) Calculamos en primer lugar los rangos de la matriz del sistema y el de la ampliada, realizando operaciones elementales.

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1+a \\ 0 & -2 & 1-a & 1-a \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1-a & 1-a \\ 0 & 2a & 2 & 2(-1+a) \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1-a & 1-a \\ 0 & 0 & 2+a-a^2 & -2+3a-a^2 \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 si $a = -1$ ó $a = 2$. Cuando $a = 2$ el rango de la matriz ampliada es 2 y el sistema es compatible indeterminado con 1 parámetro. Si $a = -1$ el rango de la matriz ampliada es 3 y el sistema es incompatible. En todos los demás casos (es decir, si $a \neq -1$ y $a \neq 2$) el sistema es compatible determinado.

(b) Sustituyendo $a = 2$ vemos que el sistema original es equivalente al siguiente sistema,

$$x + z = 1$$
$$-2y - z = -1$$

Tomando z como parámetro, se obtiene $x = 1 - z$, $y = (1 - z)/2$, con $z \in \mathbb{R}$.

(2) *Sea la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & a \end{pmatrix}$$

(a) *Hallar el polinomio característico y los valores propios (o autovalores) de la matriz A.*
(b) *Hallar para qué valores del parámetro a, la matriz es diagonalizable.*
(c) *Para $a = 0$, hallar la matriz diagonal correspondiente y la matriz de cambio de base.*

Solución:

(a)

(b) El polinomio característico es (desarrollando por la primera columna)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -2 & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(a-\lambda)$$

Por lo tanto, los valores propios son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_3 = a$$

(c) **(Caso I : a = 1)** Los valores propios son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad 1. Calculamos el espacio $S(1)$. Es la solución del sistema

$$\begin{cases} -3y + z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $y = z = 0$, $x \in R$. Por tanto, $S(1) =< (1,0,0) >$ y como $\dim S(1) = 1 \neq 2$, la multiplicidad de $\lambda_1 = 1$, tenemos que la matriz A no es diagonalizable.

(Caso II : a = -1) Los valores propios son $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad 2 y $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad 1. Calculamos el espacio $S(-1)$. Es la solución del sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ -2y = 0 \end{cases}$$

cuya solución es $y = 0$, $2x + z = 0$. Por tanto, $S(-1) =< (1,0,-2) >$ y como $\dim S(-1) = 1 \neq 2$, la multiplicidad de $\lambda_1 = -1$, tenemos que la matriz A no es diagonalizable.

Caso III: Si $a \neq -1, 1$, los valores propios son raíces simples del polinomio característico y, por tanto, la matriz A es diagonalizable.

(d) Para $a = 0$, fácilmente se calcula

$$S(1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\} =< (1,0,0) >$$
$$S(-1) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2y = z, 2x = y\} =< (1,2,4) >$$
$$S(0) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x = -z\} =< (1,0,-1) >$$

Por lo tanto, la forma diagonal D y la matriz de cambio de base P, son

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) *Dada la aplicación lineal* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + y + z, 3x + 2y, -x - 2z)$$

(a) *Escribir la matriz asociada a* f *(respecto de las bases canónicas de* $\mathbb{R}^3$ *y de* $\mathbb{R}^4$*). Calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen de* f*.*

(b) *Utilizando el número mínimo de ecuaciones necesarias, escribir un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que determinen el núcleo y un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que determinen la imagen de* f*.*

(c) *Hallar una base de la imagen de* f *y una base para el núcleo de* f*.*

Solución:

(a) La matriz, A, de la aplicación f, respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la forma reducida,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & x \\ 2 & 1 & 1 & y \\ 3 & 2 & 0 & z \\ -1 & 0 & -2 & t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -1 & 3 & y - 2x \\ 0 & -1 & 3 & z - 3x \\ 0 & 1 & -3 & t + x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & x \\ 0 & -1 & 3 & y - 2x \\ 0 & 0 & 0 & z - x - y \\ 0 & 0 & 0 & t - x + y \end{pmatrix}$$

de donde deducimos que $\dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rango}(A) = 2$. De la fórmula

$$3 = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$$

obtenemos ahora que $\dim(\ker(f)) = 1$

(b) Un sistema de ecuaciones que definen a $\operatorname{Im}(f)$ es

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x - y - t &= 0 \end{aligned}$$

Un sistema lineal de ecuaciones para determinar $\ker(f)$ es

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y &= 0 \\ -x - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Como $\dim(\ker(f)) = 1$, sobran dos ecuaciones. Elegimos, por ejemplo, las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -x - 2z &= 0 \end{aligned}$$

(c) Una base de $\operatorname{Im}(f)$, obtenida a a partir de las columnas de A, es $\{(1, 2, 3, -1), (1, 1, 2, 0)\}$. Ahora calculamos una base de $\ker(f)$. Para ello resolvemos el sistema anterior,

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ -x - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Hay un parámetro. Elegimos z como el parámetro. Las variables dependientes son x e y. Entonces,

$$\ker(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2z, y = 3z\} = \{(-2z, 3z, z) : z \in \mathbb{R}\}$$

y una base de $\ker(f)$ es $\{(-2, 3, 1)\}$.

(4) *Sea el conjunto* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0; \ln(xy) \geq 0\}$.

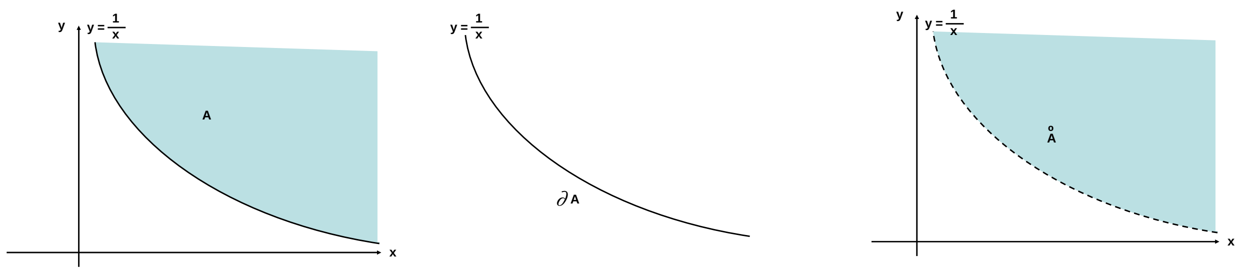
(a) *Dibujar el conjunto* A*, su frontera y su interior, y discute si* A *es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.*

(b) *Considerar la función* $f(x, y) = x + 2y$*. ¿Se puede utilizar el teorema de Weierstrass para determinar si esta función alcanza un máximo y/o un mínimo en el conjunto* A*? Dibujar las curvas de nivel de* f*, indicando la dirección de crecimiento de la función.*

(c) *Utilizando las curvas de nivel de* $f(x, y)$*, determinar gráficamente (sin utilizar, por tanto, las condiciones de primer orden) los extremos absolutos de la función* f *en el conjunto* A*.*

Solución:

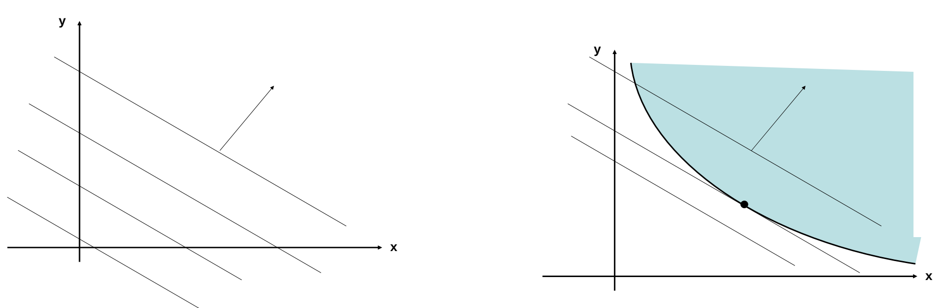
(a) La ecuación $\ln(xy) \geq 0$ es equivalente a $xy \geq 1$. Como $x, y > 0$, el conjunto es $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1/x, \quad x > 0\}$. Gráficamente,



La frontera es el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1/x, \quad x > 0\}$. El interior es el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1/x, \quad x > 0\}$.

Como $\partial A \cap A \neq \emptyset$, el conjunto A no es abierto. Además $\partial A \subset A$ por lo que el conjunto A es cerrado. Gráficamente, vemos que A no es acotado. El conjunto A no es compacto (ya que no está acotado). Consideremos ahora la función $g(x, y) = \ln(xy) = \ln x + \ln y$, definida en el conjunto convexo $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$. El Hessiano de esta función es $\mathrm{H}\, g = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$, que es definido negativo. De aquí deducimos que la función g es cóncava en D. Como $A = \{(x, y) \in D : g(x, y) \geq 0\}$, el conjunto A es convexo.

(b) No se puede aplicar el Teorema de Weierstrass porque el conjunto A no es compacto. Las curvas de nivel de $f(x, y) = x + 2y$ son los conjuntos de la forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = C - x/2\}$ que son líneas rectas. Gráficamente (el vector indica la dirección de crecimiento)



(c) Teniendo en cuenta las curvas de nivel de f, la función no alcanza ningún máximo (absoluto o relativo) en A . El mínimo absoluto se alcanza en el punto de tangencia de la recta $y = C - x/2$ con la gráfica de $y = 1/x$,

En este punto se verifica que

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2}$$

es decir $x = \pm\sqrt{2}$. Y como $x > 0$, el mínimo se alcanza el el punto $\left(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$,

(5) *Considerar la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xye^x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) *Estudiar si la función* f *es continua en el punto* $(0,0)$. *Estudiar en qué puntos de* $\mathbb{R}^2$ *es continua la función* f.

(b) *Calcular las derivadas parciales de* f *en el punto* $(0,0)$, *en caso de que existan. ¿Es diferenciable la función en el punto* $(0,0)$*?*

Solución:

(a) Consideremos las líneas rectas, $x(t) = t$ and $y(t) = kt$ con $k \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to 0} \frac{tkte^t}{t^2 + k^2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{kt^2e^t}{(1+k^2)t^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Como este límite depende de k el límite no existe, por lo que f no es continua en el punto $(0,0)$. La función f es continua en todos los demás puntos $(x,y) \neq (0,0)$, ya que es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(b) Las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$ son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t}. \end{aligned}$$

Observamos que para $t \neq 0$ se verifica que

$$f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0; \quad f(0,t) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^2} = 0.$$

De aquí deducimos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0. \end{aligned}$$

En el punto $(x,y) = (0,0)$ la función f no es continua y por tanto tampoco es diferenciable.

(6) *Clasificar la forma cuadrática*

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 57z^2 - 6axy$$

en función de los valores del parámetro a.

Solución:

Llamamos A a la matriz asociada a Q. Entonces,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3a & 0 \\ -3a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 57 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los menores principales,

$$D_1 = 3 > 0; \; D_2 = 9 - 9a^2 = 9(1 - a^2); \; D_3 = 57D_2$$

Observamos que $D_2 \geq 0$ si y sólo si $1 - a^2 \geq 0$. Esta ecuación es equivalente $|a| \leq 1$ ó $-1 \leq a \leq 1$. Como $D_3 = 57D_2$, vemos que Q es definida positiva si

$$|a| < 1$$

Si $a = 1$, entonces la forma cuadrática es

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 57z^2 - 6xy = 3(x - y)^2 + 57z^2$$

por lo que la forma cuadrática es semidefinida positiva.

Si $a = -1$, entonces la forma cuadrática es

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 3y^2 + 57z^2 + 6xy = 3(x + y)^2 + 57z^2$$

por lo que la forma cuadrática es semidefinida positiva.

(7) *Dada la función*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$$

(a) *Obtener los puntos críticos de la función y clasificarlos.*
(b) *Determinar los conjuntos convexos y abiertos de* $\mathbb{R}^2$ *donde la función* f *es cóncava y los conjuntos convexos y abiertos de* $\mathbb{R}^2$ *donde es convexa.*
(c) *Estudiar si* f *tiene extremos absolutos en* $\mathbb{R}^2$.

Solución:

(a) Las derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$, luego la función es diferenciable. Los puntos críticos son por tanto las soluciones de

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2xy &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + x^2 &= 0 \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos que

$$y = -\frac{x^2}{2}$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación obtenemos

$$2x - x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\sqrt{2}$$

Lo cual proporciona las soluciones

$$(0,0), \quad (\sqrt{2}, -1), \quad (-\sqrt{2}, -1)$$

Como $f \in C^2$, los puntos críticos quedan determinados por el Hessiano

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2+2y & 2x \\ 2x & 2 \end{pmatrix}$$

De donde

$$\mathrm{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

por lo que $(0,0)$es un mínimo local. Por otra parte

$$\mathrm{H}\, f(\sqrt{2}, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

por lo que $(\sqrt{2}, -1)$ es un punto de silla. Finalmente,

$$\mathrm{H}\, f(\sqrt{2}, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

luego $(-\sqrt{2}, -1)$ es un punto de silla.

(b) Los menores principales de la matrix $\mathrm{H}\, f(x,y)$ son $D_1 = 2(1+y)$, $D_2 = 4(1+y-x^2)$.
Vemos que $D_1 < 0$ si y sólo si $1 + y < 0$. En este caso $D_2 = 4(1+y-x^2) < 0$ y la forma cuadrática asociada a $\mathrm{H}\, f(x,y)$ es indefinida. Concluimos que la función f no es cóncava en ningún subconjunto abierto de $\mathbb{R}^2$.
Por otra parte, $D_1 > 0$ si y sólo si $y > -1$. En este caso $D_2 = 4(1+y-x^2) > 0$ si y sólo si $x^2 < y+1$. En este conjunto la forma cuadrática asociada a $\mathrm{H}\, f(x,y)$ es definida positiva. Concluimos que la función f es convexa en el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y+1, y > -1\}$.

(c) $f(x,x) = x^3 + 2x^2 - 4$ $\lim_{x\to\infty} f(x,x) = \infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x,x) = -\infty$ luego no puede haber ni mínimo ni máximo absoluto.

(8) *Considerar la función*

$$f(x, y, z) = 4x + 2y + z$$

y el conjunto

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 21\}$$

(a) *Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.*
(b) *Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange.*
(c) *Clasificar los puntos críticos encontrados en el apartado anterior, utilizando las condiciones de segundo orden del Lagrangiano.*

Solución:

(a) El Lagrangiano es

$$L(x, y, z) = 4x + 2y + z + \lambda(21 - x^2 - y^2 - z^2)$$

Derivando obtenemos las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{cases} 4 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ 1 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \end{cases}$$

(b) Dividiendo las ecuaciones primera y segunda por la tercera ecuación obtenemos

$$4 = \frac{x}{z}, \qquad 2 = \frac{y}{z}$$

por lo que $x = 4z, \quad y = 2z$. Sustituyendo estos valores en la restricción obtenemos la ecuación

$$21 = x^2 + y^2 + z^2 = 21z^2$$

por lo que $z = \pm 1$. Obtenemos dos soluciones

$$(4, 2, 1) \quad \lambda = \frac{1}{2}, \qquad (-4, -2, -1) \quad \lambda = \frac{-1}{2}$$

(c) El hessiano de la función de Lagrange es

$$\mathrm{H}\, L(x, y, z; \lambda) = \begin{pmatrix} -2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

Vemos que

$$\mathrm{H}\, L(4, 2, 1); 1/2) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que es definido negativo y

$$\mathrm{H}\, L(-4, -2, -1); -1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es definido positivo. La función f alcanza un máximo en el punto $(4, 2, 1)$ y un mínimo en el punto $(-4, -2, -1)$.