Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Septiembre de 2007.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor compruebe que hay 14 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPAR LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale $0'5$ puntos.
- Hay espacio adicional al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Total	

(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x - y - bz =& 1 \\ x + (a-1)y =& b+1 \\ x + (a-1)y + (a-b)z =& 2b+1 \end{aligned}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes.

(a) Clasificar el sistema según los valores de a y b.

(b) Resolver el sistema anterior para los valores a y b para los que el sistema anterior es compatible indeterminado. ¿Cuántos parámetros son necesarios para describir la solución?

---

(2) Sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

tiene como valores propios $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 8$, resolver los apartados siguientes.

(a) Hallar los vectores propios (o autovectores) de la matriz A.

(b) Justificar razonadamente si la matriz A es diagonalizable y si lo es, encontrar dos matrices D y P tales que $A = PDP^{-1}$.

(c) Encontrar una matriz B tal que $B^2 = A$. Es suficiente dejar indicada B como el producto de tres matrices.

---

(3) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z - t, -x + y - z + t)$$

(a) Calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen y unas ecuaciones que definen estos subespacios.

(b) Hallar una base de la imagen de f y una base para el núcleo de f.

---

(4) Dado el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |y| \leq x, \quad x \leq 1\}$$

(a) Dibuja el conjunto A, calculando los vértices del conjunto. Dibuja su frontera y su interior y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.

(b) Considera la función

$$f(x, y) = \frac{1}{(2x-1)^2 + (y-1)^2}$$

¿En qué punto(s) no es continua? Determina si f tiene máximo y/o mínimo sobre A. Enuncia los Teoremas que utilices.

(c) Dibuja las curvas de nivel de la función $g(x, y) = (x-2)^2 + y^2$ y utilízalas para determinar dónde están los máximos y mínimos de g en A.

---

(5) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^4+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Estudiar si la función f es continua en el punto $(0, 0)$. Estudiar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es continua la función f.

(b) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$.

(c) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es diferenciable la función f?

---

(6) Dada la forma cuadrática

$$Q(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 4axy + 2yz$$

(a) Determina la matriz asociada a dicha forma cuadrática.

(b) Clasificar la forma cuadrática, en función del parámetro a.

---

(7) Considera la función

$$f(x, y) = x^2 - \ln(x^2) - 4\ln(y^2) + y^2$$

(a) Calcula el vector gradiente y la matriz Hessiana de f en un punto cualquiera (x, y) en el dominio de la función.

(b) Obtener los puntos críticos de f y clasificarlos.

(c) Estudiar si la función f alcanza extremos globales en el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \quad y > 0\}$$

---

(8) Considerar la función

$$f(x, y, z) = x + y - y^2 - x^2 - \frac{z^2}{2}$$

y el conjunto

$$A = \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}$$

(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.
(b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange y hallar los extremos de f en A, especificando si son máximos o mínimos locales.
