Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Septiembre de 2007.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor compruebe que hay 14 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPAR LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale $0'5$ puntos.
- Hay espacio adicional al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Total	

(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x - y - bz =& 1 \\ x + (a-1)y =& b + 1 \\ x + (a-1)y + (a-b)z =& 2b + 1 \end{aligned}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son constantes.

(a) Clasificar el sistema según los valores de a y b.

(b) Resolver el sistema anterior para los valores a y b para los que el sistema anterior es compatible indeterminado. ¿Cuántos parámetros son necesarios para describir la solución?

(a) Calculamos en primer lugar los rangos de la matriz del sistema y el de la ampliada, realizando operaciones elementales.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -b & 1 \\ 1 & a-1 & 0 & 1+b \\ 1 & a-1 & a-b & 1+2b \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -b & 1 \\ 0 & a & b & b \\ 0 & a & a & 2b \end{array}\right)$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -b & 1 \\ 0 & a & b & b \\ 0 & 0 & a-b & b \end{array}\right)$$

Vemos que $\det A = a(a-b)$ y es distinto de 0 cuando $a \neq 0$ y $a \neq b$. En este caso $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|B) = 3$ y el sistema es compatible determinado.
Si $a = 0$ ó $a = b$, entonces $\operatorname{rango} A \leq 2$. Analizamos primero el caso $a = b$. Si $a = b = 0$, entonces $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|B) = 1$ y el sistema es compatible indeterminado. Si $a = b \neq 0$, entonces $\operatorname{rango} A = 2$ y $\operatorname{rango}(A|B) = 3$ y el sistema es incompatible.
Veamos ahora el caso $a \neq b$. Si $a = 0 \neq b$, entonces $\operatorname{rango} A = 2$ y $\operatorname{rango}(A|B) = 3$ y el sistema es incompatible.
En resumen, el sistema es

- Compatible determinado si $a \neq 0$ y $a \neq b$. (ya que $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|B) = 3$.)
- Compatible indeterminado si $a = b = 0$. (ya que $\operatorname{rango} A = \operatorname{rango}(A|B) = 1$ y hay dos parámetros.)
- Incompatible si $a = b \neq 0$. (ya que $\operatorname{rango} A = 2 \neq \operatorname{rango}(A|B) = 3$.)
- Incompatible si $a = 0$ y $b \neq 0$. (ya que $\operatorname{rango} A = 2 \neq \operatorname{rango}(A|B) = 3$.)

(b) Sustituyendo $a = 0$ y $b = 0$, vemos que el sistema original es equivalente al siguiente sistema,

$$x - y = 1$$

Tomando y, z como parámetros, se obtiene $x = y + 1$, con $y, z \in \mathbb{R}$.

(2) Sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 2 & 8 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

tiene como valores propios $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = 8$, resolver los apartados siguientes.

(a) Hallar los vectores propios (o autovectores) de la matriz A.

(b) Justificar razonadamente si la matriz A es diagonalizable y si lo es, encontrar dos matrices D y P tales que $A = PDP^{-1}$.

(c) Encontrar una matriz B tal que $B^2 = A$. Es suficiente dejar indicada B como el producto de tres matrices.

(a) El espacio de vectores propios $S(6)$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ 2x + 2y - 2z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $x = z - y$. Por tanto, $S(6) =< (1,0,1)(-1,1,0) >$.
El espacio de vectores propios $S(8)$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{aligned} -x + y - z &= 0 \\ 2x - 2z &= 0 \\ x + y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $x = z$, $y = 2z$. Por tanto, $S(8) =< (1,2,1) >$.

(b) En el apartado anterior hemos visto $\dim S(6) = 2$ y $\dim S(8) = 1$. Por otra parte, sabemos que $\dim S(6) \leq n_1$, $\dim S(8) \leq n_2$ y que $n_1 + n_2 = 3$. Obtenemos que $2 \leq n_1 \leq 3$, es decir o bien $n_1 = 2$ o bien $n_1 = 3$. Pero $n_1 = 3$ no es compatible con $n_1 + n_2 = 3$ y $n_1 \geq 1$. Concluimos que $n_1 = 2$ y $n_2 = 1$. Y como $\dim S(6) = 2 = n_1$ y $\dim S(8) = 1 = n_2$, la matriz es diagonalizable.

Observación: Hay otras maneras de demostrar que la matriz es diagonalizable, que exponemos a continuación. (1) El conjunto $\{(1,0,1)(-1,1,0),(1,2,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ formada por vectores propios de A. Por tanto, A es diagonalizable. (2) La suma de los valores propios (contando las multiplicidades) es igual a la traza de la matriz, es decir 20. Las dos posibilidades son $6+8+6 = 20$ ó $6+8+8 = 22$. Por tanto los valores propios deben ser $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 8$, $\lambda_3 = 6$, con lo cual $n_1 = 2 = \dim S(6)$, $n_2 = 1 = \dim S(8)$ y la matriz es diagonalizable. (3) Calculando el polinomio característico y comprobando que es es $(6-\lambda)^2(8-\lambda)$. Es decir, $n_1 = 2 = \dim S(6)$, $n_2 = 1 = \dim S(8)$ y la matriz es diagonalizable. (Esta última alternativa no es la más eficiente).

La forma diagonal, D y la matriz cambio de base, P, son

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices verifican que $A = PDP^{-1}$.

(c) Es suficiente tomar $B = PCP^{-1}$ donde P es la matriz calculada en el ejercicio anterior y

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{8} \end{pmatrix}$$

ya que, como $C^2 = D$, tenemos que $B^2 = \left(PCP^{-1}\right)\left(PCP^{-1}\right) = PC\left(P^{-1}P\right)CP^{-1} = PC^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

(3) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z - t, -x + y - z + t)$$

(a) Calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen y unas ecuaciones que definen estos subespacios.
(b) Hallar una base de la imagen de f y una base para el núcleo de f.

(a) La matriz, A, de la aplicación f, respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la forma reducida,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & x \\ -1 & 1 & -1 & 1 & y \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x + y \end{pmatrix}$$

de donde deducimos que $\dim \mathrm{Im}(f) = \mathrm{rango}(A) = 1$. Además un sistema de ecuaciones que definen a $\mathrm{Im}(f)$ es

$$x + y = 0$$

De la fórmula

$$4 = \dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$$

obtenemos ahora que $\dim(\ker(f)) = 3$ y un sistema lineal de ecuaciones para determinar $\ker(f)$ es

$$x - y + z - t = 0$$

(b) Una base de $\mathrm{Im}(f)$, obtenida a a partir de las columnas de A, es $\{(1, -1)\}$. Ahora calculamos una base de $\ker(f)$. Para ello resolvemos el sistema anterior,

$$x - y + z - t = 0$$

Claramente, podemos tomar y, z, t como parámetros y x como variable dependiente. Entonces,

$$\ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y - z + t\} = \{(y - z + t, y, z, t) : y, z, t \in \mathbb{R}\}$$

y una base de $\ker(f)$ es $\{(1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$.

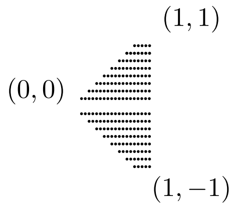
(4) Dado el conjunto
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad |y| \leq x, \quad x \leq 1\}$$

(a) Dibuja el conjunto A, calculando los vértices del conjunto. Dibuja su frontera y su interior y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.

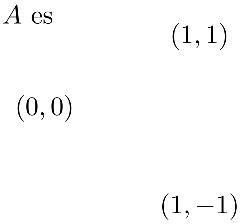
(b) Considera la función
$$f(x,y) = \frac{1}{(2x-1)^2 + (y-1)^2}$$
¿En qué punto(s) no es continua? Determina si f tiene máximo y/o mínimo sobre A. Enuncia los Teoremas que utilices.

(c) Dibuja las curvas de nivel de la función $g(x,y) = (x-2)^2 + y^2$ y utilízalas para determinar dónde están los máximos y mínimos de g en A.

(a) El conjunto A es



(b) La frontera (∂A) de A es

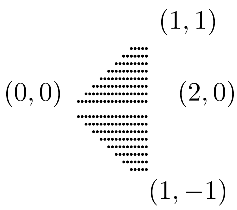


el interior de A es $A \setminus \partial A$, y la clausura de A es $\bar{A} = A \cup \partial A = A$ (ya que $\partial A \subset A$). Por lo tanto, A es cerrado, no es abierto (porque $\partial A \cap A \neq \emptyset$), es compacto (cerrado y acotado). Finalmente, el conjunto A es convexo.

Otra forma de probar que A es cerrado y convexo es el siguiente razonamiento: Las funciones $h_1(x,y) = y - x$, $h_2(x) = y + x$ y $h_3(x,y) = 1 - x$ son continuas y lineales. Por tanto el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(x,y) \leq 0, h_2(x,y) \geq 0, \quad h_3(x,y) \geq 0\}$ es cerrado y convexo.

(b) La función f es continua excepto en el punto $(1/2, 1) \notin A$. Por tanto, f es continua en A, que es compacto. Por el Teorema de Weierstrass, la función alcanza un máximo y un mínimo en el conjunto A.

(c) Las curvas de nivel de g verifican la ecuación $(x-2)^2 + y^2 = C$, para $C \geq 0$. Por tanto, son circunferencias de centro $(2,0)$ y radio $\sqrt{C}$.



Gráficamente, vemos que el mínimo (global) se alcanza en el punto $(1,0)$ y que el máximo (global) se alcanza en el punto $(0,0)$.

(5) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estudiar si la función f es continua en el punto $(0,0)$. Estudiar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es continua la función f.
(b) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.
(c) ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es diferenciable la función f?

(a) Estudiamos el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$ a través de la recta $x(t) = t$, $y(t) = kt$ con $k \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{t\to 0} f(t,kt) = \lim_{t\to 0} \frac{kt^2}{t^4 + k^2t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{k}{t^2 + k^2} = \frac{1}{k}$$

y como depende del parámetro $k \in \mathbb{R}$, el límite no existe y la función no es continua en el punto $(0,0)$. Como es un cociente de polinomios y el denominador sólo se anula en el punto $(0,0)$, la función es continua en todos los puntos $(x,y) \neq (0,0)$.

(b) Las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t}$$

Observamos que para todo $t \neq 0$,

$$f(t,0) = \frac{0}{t^4} = 0$$
$$f(0,t) = \frac{0}{t^2} = 0$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$

(c) Para $(x,y) \neq (0,0)$, la función $f(x,y)$ está definida como un cociente de polinomios y el denominador no se anula. Por tanto, para $(x,y) \neq (0,0)$, todas las derivada parciales existen y son continuas. Deducimos que la función es diferenciable en todos los puntos $(x,y) \neq (0,0)$.
En el punto $(0,0)$ la función no es continua y, por tanto, no es diferenciable.

(6) Dada la forma cuadrática

$$Q(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 + 4axy + 2yz$$

(a) Determina la matriz asociada a dicha forma cuadrática.

(b) Clasificar la forma cuadrática, en función del parámetro a.

(a) La matriz asociada a Q es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2a & 0 \\ 2a & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Calculamos

$$D_1 = 2 > 0$$
$$D_2 = 2 - 4a^2$$
$$D_3 = 4 - 12a^2$$

Vemos que $D_2 \geq 0$ si y sólo si $2 - 4a^2 \geq 0$, es decir si y sólo si

$$\frac{-1}{\sqrt{2}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por otra parte, $D_3 \geq 0$ si y sólo si $4 - 12a^2 \geq 0$, es decir si y sólo si

$$\frac{-1}{\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Por tanto, si

$$\frac{-1}{\sqrt{3}} < a < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

entonces $D_1, D_2, D_3 > 0$ y Q es definida positiva. Si

$$a^2 = \frac{1}{3}$$

entonces $D_1, D_2 > 0, D_3 = 0$ y Q es semidefinida positiva.
En cualquier otro caso, la forma cuadrática es indefinida.

(7) Considera la función

$$f(x,y) = x^2 - \ln(x^2) - 4\ln(y^2) + y^2$$

(a) Calcula el vector gradiente y la matriz Hessiana de f en un punto cualquiera (x,y) en el dominio de la función.

(b) Obtener los puntos críticos de f y clasificarlos.

(c) Estudiar si la función f alcanza extremos globales en el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \quad y > 0\}$$

(a) Haciendo las dos derivadas parciales obtenemos

$$\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = (2x - \frac{2x}{x^2}, -4\frac{2y}{y^2} + 2y) = (2x - \frac{2}{x}, -\frac{8}{y} + 2y)$$

Y la matriz hessiana es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{x^2} & 0 \\ 0 & \frac{8}{y^2} + 2 \end{pmatrix}$$

(b) El gradiente existe en todos los puntos del dominio. Observamos, además, que las derivadas parciales de la función son continuas en todo el dominio, por lo que la función es diferenciable en todos los puntos de su dominio. Por tanto, los puntos críticos deben satisfacer la condición necesaria de primer orden: $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Utilizando la expresión de ∇f calculada en el apartado anterior e igualando a 0 quedan las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} 2(x^2-1) & = & 0 \\ 2(-4+y^2) & = & 0 \end{array}\right\}$$

despejando x en la primera ecuación obtenemos $x = 1, -1$. Y haciendo lo mismo en la segunda obtenemos $y = 2, -2$. Los puntos críticos son $(1,2)$, $(1,-2)$, $(-1,2)$ y $(-1,-2)$; los puntos anteriores son todos los puntos críticos posibles.

Para clasificarlos aplicamos la condición suficiente de segundo orden. Al Evaluar la matriz hessiana, calculada en el apartado anterior, en cada uno de los cuatro puntos críticos obtenemos la misma matriz

$$Hf(1,2) = Hf(1,-2) = Hf(-1,2) = Hf(-1,2) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

que definida positiva. Por tanto, los cuatro puntos críticos son mínimos locales de f.

(c) El conjunto A es el primer cuadrante del plano y es un conjunto abierto (desigualdades estrictas). Por tanto, no podemos aplicar el teorema de Weierstrass.

Por otra parte, el conjunto A es convexo (y abierto) y en A (en realidad en todo el dominio de f) la matriz hessiana es siempre definida positiva. Por lo tanto, la función es estrictamente convexa en A, por ello en el punto $(1,2)$ (que es mínimo local, por el apartado anterior) f alcanza el mínimo global (en A). Si f alcanzara un máximo global en un punto de A, al ser el conjunto abierto debería alcanzar en este mismo punto también un máximo local. Pero, en el apartado anterior, hemos visto que f no tiene máximos locales en A.

(8) Considerar la función

$$f(x,y,z) = x + y - y^2 - x^2 - \frac{z^2}{2}$$

y el conjunto

$$A = \{(x,y,z) : x + y + z = 0\}$$

(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.

(b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange y hallar los extremos de f en A, especificando si son máximos o mínimos locales.

(a) El Lagrangiano es

$$L(x,y,z,\lambda) = x + y - y^2 - x^2 - \frac{z^2}{2} + \lambda(x+y+z).$$

Las ecuaciones de Lagrange son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 1 - 2x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 1 - 2y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -z + \lambda = 0 \\ & \ x + y + z = 0 \end{aligned}$$

(b) De las tres primeras ecuaciones, obtenemos: $x = y$ y $z = 2x - 1$. Sustituyendo estos valores en la última ecuación obtenemos

$$x + x + 2x - 1 = 0$$

de donde

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{1}{4}, \quad z = -\frac{1}{2}, \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

Concluimos que el único punto que cumple las condiciones de Lagrange es $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$.

La matriz Hessiana del Lagrangiano es

$$HL(x,y,z) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que, claramente, es definida negativa. Luego, $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ es un máximo de f en A. Y no hay mínimos.