Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. Septiembre de 2006.

IMPORTANTE:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** No entregar el papel en sucio. Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. LAS DOS ÚLTIMAS PÁGINAS SE UTILIZARÁN PARA PAPEL EN SUCIO.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa $0'5$ puntos.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) Se considera el sistema lineal

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & +2y & & -t & = & b \\ x & & +az & +t & = & b \\ 3x & +6y & +az & -3t & = & 3 \end{array}\right\}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

(a) Clasifica el sistema según los valores de los parámetros a, b.

(b) Halla la solución para los valores de los parámetros $a = 0$ y $b = 1$.

Solución.

(a) Dado que hay 3 ecuaciones y 4 incógnitas, el sistema nunca es compatible determinado. Haciendo operaciones elementales

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & a & 1 & b \\ 3 & 6 & a & -3 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & b \\ 0 & -2 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 3-3b \end{array}\right),$$

tenemos que el rango de A es 3 si y sólo si $a \neq 0$, luego en este caso el sistema es compatible indeterminado. Si $a = 0$ y $b = 1$, entonces los rangos de A y de $(A|B)$ coinciden, por lo que el sistema de nuevo es compatible indeterminado. Si $a = 0$ y $b \neq 1$, entonces rango$(A) \neq$ rango$(A|B)$, y el sistema es incompatible.

(b) Obtenemos la solución en el caso en que $a = 0$ y $b = 1$. Aprovechando la estructura triangular del sistema equivalente, encontramos que la solución es $x = 1 - t$, $y = t$ con z, t libres. Es decir, el conjunto de soluciones es

$$\{(1-t, t, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\}$$

(2) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Halla el polinomio característico y comprueba que los autovalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$. ¿Cuál de ellos es doble?

(b) Determina la matriz diagonal correspondiente y la matriz de cambio de base.

(c) Calcula A^5. (Es suficiente dejar expresado el resultado como producto de tres matrices. No es necesario hacer ningún cálculo adicional)

(a) El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda-2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 2-\lambda & 2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2-\lambda \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)^2(1-\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 8\lambda + 4$$

por lo que los autovalores son $\lambda_1 = 1$, simple y $\lambda_2 = 2$, doble.

(b) Calculamos el espacio de vectores propios asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$. Este espacio es el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente al sistema

$$-y + z = 0$$
$$-x + z = 0$$

cuya solución es $x = y = z$. Obtenemos que

$$S(1) =< (1,1,1) >$$

Calculamos el espacio de vectores propios asociados al autovalor $\lambda_2 = 2$. Este espacio es el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo siguiente

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que es equivalente al sistema $-x - y + z = 0$. Obtenemos que

$$S(2) =< (1,-1,0), (0,1,1) >$$

Por tanto, $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Ahora calculamos

$$A^5 = PD^5P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 2^5 \end{pmatrix} P^{-1}$$

(3) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^5$,

$$f(x, y) = (x + y, 2x + 2y, x + y, 3x + 3y, 4x + 4y)$$

(a) Calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen y unas ecuaciones para estos subespacios.

(b) Hallar una base de la imagen de f y una base para el núcleo de f.

(a) La matriz, A, de la aplicación f, respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos la forma reducida,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 2 & x_2 \\ 1 & 1 & x_3 \\ 3 & 3 & x_4 \\ 4 & 4 & x_5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & x_4 - 3x_1 \\ 0 & 0 & x_5 - 4x_1 \end{array}\right)$$

de donde deducimos que $\dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rango}(A) = 1$. Además un conjunto de ecuaciones que definen a $\operatorname{Im}(f)$ es

$$x_2 = 2x_1, \quad x_3 = x_1, \quad x_4 = 3x_1, \quad x_5 = 4x_1$$

De la fórmula

$$2 = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$$

obtenemos ahora que $\dim(\ker(f)) = 1$ y un sistema lineal de ecuaciones para determinar $\ker(f)$ es

$$x + y = 0$$

(b) Una base de $\operatorname{Im}(f)$, obtenida a a partir de las columnas de A, es $\{(1, 2, 1, 3, 4)\}$. Ahora calculamos una base de $\ker(f)$. Para ello resolvemos el sistema anterior,

$$x + y = 0$$

Como sabemos que hay un parámetro, elegimos x como el parámetro. La variable dependiente es y. Se verifica la relación $y = -x$. Entonces,

$$\ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x, \} = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$$

y una base de $\ker(f)$ es $\{(1, -1)\}$.

(4) Dado el conjunto

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } 0 \leq y \leq x^2, \quad 0 \leq x \leq 1\}$$

(a) Dibuja el conjunto S, su frontera y su interior y discute si S es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.

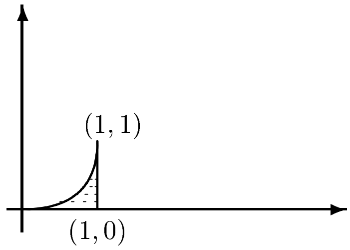
(b) Demuestra que la función

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y-3}$$

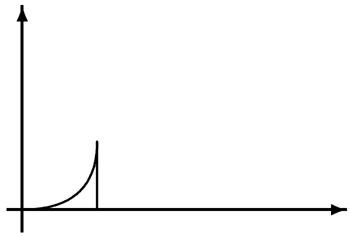
definida en el conjunto S, tiene máximo y mínimo sobre S.

(c) Dibuja las curvas de nivel de $f(x,y)$ y determina donde están los máximos y mínimos de f en S.

(a) El conjunto S es

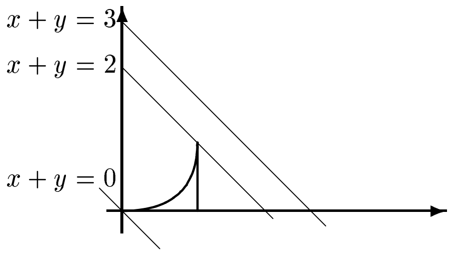


La frontera de S es



el interior de S es $S \setminus \partial S$, donde ∂S denota la frontera del conjunto S. Por lo tanto, S es es cerrado. Además, como $\partial S \subset S$ (y, por lo tanto, $\partial S \cap S \neq \emptyset$), el conjunto no es abierto. El conjunto es compacto (cerrado y acotado). Finalmente, el conjunto S no es convexo ya que el segmento que une los puntos $(0,0) \in S$ y $(1,1) \in S$ no está contenido en el conjunto.

(b) La función es continua en el conjunto S (ya que el denominador se anula sobre la recta $x+y=3$ que no interesecta al conjunto) y el conjunto es compacto. Por el Teorema de Weierstrass, la función alcanza un máximo y un mínimo en el conjunto S.



(c) Las curvas de nivel de $f(x,y) = K$ son las rectas $x+y-3 = 1/K$ con $K \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$. El máximo se alcanza en el punto $x=0$, $y=0$, donde $f(x,y)$ toma el valor $-1/3$ y el mínimo se alcanza en el punto $x=y=1$, donde $f(x,y)$ toma el valor -1

(5) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estudiar si la función f es continua en el punto $(0,0)$.
(b) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.
(c) Estudiar si la función f es diferenciable en el punto $(0,0)$.

(a) Estudiamos el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$. Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos $\delta = \varepsilon$. Si se verifica que

$$0 < \|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta$$

entonces tenemos que

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = |x| \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x| \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$\leq |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \delta = \varepsilon$$

por lo que f es continua en el punto $(0,0)$.

(b) Las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t\sqrt{t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sqrt{t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{|t|}$$

este límite no existe ya que

$$\lim_{t\to 0+} \frac{t}{|t|} = 1 \qquad \lim_{t\to 0-} \frac{t}{|t|} = -1$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t}$$

y como

$$f(0,t) = 0 = f(0,0)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, concluimos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

(c) La función no es diferenciable en el punto $(0,0)$ ya que en el apartado anterior hemos visto que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

no existe.

(6) Dada la forma cuadrática $Q(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2axy + 2axz$,

(a) Hallar la matriz asociada a Q.

(b) Estudiar su signo según los valores de a.

(a) La matriz asociada a Q es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -a & a \\ -a & 2 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Utilizamos el criterio de los menores principales:

$$D_1 = 2 > 0$$
$$D_2 = 4 - a^2 = (2-a)(2+a)$$
$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -a & a \\ -a & 2 & 0 \\ a & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 4a^2$$

Como $D_1 > 0$, la forma cuadrática Q no puede ser definida negativa. Para clasificar la forma cuadrática, consideramos los siguientes casos,

- En primer lugar, consideramos la posibilidad de que $D_3 = 0$. Esto ocurre cuando $a^2 = 2$, por lo que $D_3 = 0$ si y sólo si $a = \sqrt{2}$ ó $a = -\sqrt{2}$. En cualquiera de ambos casos tenemos,

$$D_1 = 2 > 0$$
$$D_2 = 4 - a^2 = 2$$
$$D_3 = 0$$

  y vemos que, en este caso, Q es semidefinida positiva.
- En segundo lugar, consideramos la alternativa en que $a^2 < 2$, es decir $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$. En este caso,

$$D_1 = 2 > 0$$
$$D_2 = 4 - a^2 > 2 > 0$$
$$D_3 = 8 - 4a^2 > 0$$

  y la forma cuadrática es definida positiva.
- Finalmente si $a^2 > 2$, es decir $a < -\sqrt{2}$ ó $a > \sqrt{2}$, tenemos que,

$$D_1 = 2 > 0$$
$$D_2 = 4 - a^2 \quad \text{(el signo es irrelevante)}$$
$$D_3 = 8 - 4a^2 < 0$$

  y la forma cuadrática es indefinida.

(7) Considera la función $f(x,y) = -2xy^2 + 4x$. Se pide,

(a) Obtener los puntos críticos de f.

(b) Clasificar los puntos críticos de f, obtenidos en el apartado anterior.

(a) Los puntos críticos deben satisfacer la condición necesaria de primer orden: el gradiente, $\nabla f(x,y)$, de f o bien es el vector $(0,0)$ o bien no existe. Haciendo las dos derivadas parciales obtenemos

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (-2y^2 + 4, -4xy)$$

e igualando a 0 quedan las ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{lcl} -2y^2 + 4 & = & 0 \\ 4xy & = & 0 \end{array}\right\}$$

Es decir,

$$\left.\begin{array}{lcl} y^2 & = & 2 \\ 4xy & = & 0 \end{array}\right\}$$

de la primera ecuación obtenemos $y = \pm\sqrt{2}$ y, sustituyendo en la segunda obtenemos que $x = 0$, por lo tanto los puntos críticos son $(0, \sqrt{2})$ y $(0, -\sqrt{2})$. Dado que el gradiente existe siempre al tratarse de una función polinómica, los puntos anteriores son todos los puntos críticos posibles.

(b) Para clasificarlos, aplicamos la condición suficiente de segundo orden. Para ello construimos la matriz hessiana

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -4y \\ -4y & -4x \end{pmatrix}$$

y estudiamos su signo sobre los dos puntos críticos. Así obtenemos en el punto $(0, \sqrt{2})$ que la matriz hessiana queda

$$\mathrm{H}\, f(0,\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -4\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando el criterio de los menores principales $D_1 = 0$, $D_2 = |A| = -32 < 0$ tenemos que $\mathrm{H}\, f(0,\sqrt{2})$ es indefinida, luego se trata de un punto de silla.
Haciendo lo mismo en el punto $(0, -\sqrt{2})$ la matriz hessiana queda

$$\mathrm{H}\, f(0,-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 0 & 4\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Aplicando el criterio de los menores principales $D_1 = 0$, $D_2 = |A| = -32 < 0$ tenemos que también es indefinida, luego se trata de otro punto de silla.

(8) Considerar la función

$$f(x,y,z) = -\frac{x^3}{3} - 2y^2 - 4z^2$$

y el conjunto

$$A = \left\{(x,y,z) : \frac{x^2}{2} + y + z = \frac{1}{8}\right\}.$$

(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.
(b) Determinar los puntos que son solución de las ecuaciones de Lagrange.
(c) De entre los puntos calculados en el apartado anterior, se sabe que uno de ellos corresponde a un máximo de f en A (no es necesario demostrar esto). Determinar cuál de los puntos del apartado anterior corresponde a un máximo de f en A.

Solución:

(a) El lagrangiano es

$$L(x,y,z) = -\frac{x^3}{3} - 2y^2 - 4z^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{2} + y + z - \frac{1}{8}\right).$$

De aquí obtenemos las ecuaciones de Lagrange:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= -x^2 + \lambda x = 0;\\
\frac{\partial L}{\partial y} &= -4y + \lambda = 0;\\
\frac{\partial L}{\partial z} &= -8z + \lambda = 0;\\
& \frac{x^2}{2} + y + z = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

(b) Podemos reescribir las ecuaciones de la forma siguiente

$$\begin{aligned}
x(x-\lambda) &= 0\\
y &= \frac{\lambda}{4}\\
z &= \frac{\lambda}{8};\\
\frac{x^2}{2} + y + z &= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

De la primera ecuación, deducimos que o bien $x = 0$ o bien $x = \lambda$.

- Si $x = 0$, entonces $\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{8} = \frac{1}{8}$, es decir, $\lambda = 1/3$. Luego, obtenemos el punto

$$x = 0, \qquad y = \frac{1}{12}, \qquad z = \frac{1}{24}, \qquad \lambda = \frac{1}{3}.$$

- Si $x = \lambda$, entonces tenemos $\frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{8} = \frac{1}{8}$, es decir, $4\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0$. Resolviendo esta ecuación obtenemos,

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{8} = -1, \frac{1}{4}$$

Sustituyendo estos valores de λ, obtenemos las soluciones,

$$\lambda = -1; \quad x = -1, \quad y = \frac{-1}{4}, \quad z = \frac{-1}{8}$$

$$\lambda = \frac{1}{4}; \quad x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{1}{16}, \quad z = \frac{1}{32}$$

Las soluciones son, por tanto, $\left(0, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}\right)$, $\left(-1, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{8}\right)$ y $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}\right)$.

(c) Sustituyendo cada uno de los puntos en la función objetivo, obtenemos,

$$\begin{aligned}
f\left(0, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}\right) &= -\frac{2}{144} - \frac{4}{576} = \frac{-1}{48};\\
f\left(-1, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{8}\right) &= \frac{1}{3} - \frac{2}{16} - \frac{4}{64} = \frac{7}{48};\\
f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}\right) &= -\frac{1}{3\cdot 4^3} - \frac{2}{16^2} - \frac{4}{32^2} = \frac{-13}{768}.
\end{aligned}$$

Luego, el punto de máximo es $\left(-1, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{8}\right)$.