IMPORTANTE:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** No entregar el papel en sucio. Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa 0'5 puntos.

Apellidos:

Nombre:

DNI:

Titulación:

Grupo:

- (1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}x + by + z &= 1 \\ y + az &= b \\ x + (b - 1)y + 2z &= 1\end{aligned}$$

donde a y b son parámetros.

- (a) Determina, según los valores de los parámetros a y b , si el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.
- (b) Resolver el sistema anterior para los valores de los parámetros a y b para los que el sistema es compatible indeterminado.

- (2) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a + 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcular el polinomio característico y los valores propios.
- (b) Para $a = 0$, comprobar que la matriz A es diagonalizable y hallar la matriz de paso (también llamada matriz cambio de base).
- (c) Estudiar para qué valores $a \neq 0$, la matriz A es diagonalizable.

- (3) Dados los vectores $\{(-1, 2, 1, -3), (3, -1, 1, -2), (2, 1, 2, -5), (2, -4, -2, 6)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

- (a) Calcular la dimensión del espacio generado por ellos.
- (b) Obtener las ecuaciones que determinan el espacio que generan.

- (4) Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x + |y| \leq 1\}$.

- (a) Dibujar el conjunto A .
- (b) Dibujar la frontera, el interior y la clausura del conjunto A . ¿Es A cerrado, abierto, convexo, acotado o compacto?
- (c) Considerar la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{(1-x)^2} & \text{Si } x \neq 1, \\ 0 & \text{Si } x = 1. \end{cases}$$

Determinar si la función f alcanza máximo o mínimo en el conjunto A .

- (5) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Estudiar si la función f es continua en el punto $(0, 0)$.
- (b) Determinar si existen las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$.
- (c) Estudiar si la función f es diferenciable en el punto $(0, 0)$.

- (6) Dada la función $f(x, y) = x^4 + x^2 y^2 + y^4 - 3x - 8y$,

- (a) Calcular el polinomio de Taylor de orden dos de f en torno al punto $(0, 0)$.
- (b) Determina si la función f es cóncava o convexa en $\mathbb{R}^2$.

- (7) Dada la función $f(x, y) = y^2 x - ay^2 - ax^2$

- (a) Comprueba que el punto $(0, 0)$ es un punto crítico de f para cualquier valor de a y estudia de qué tipo es según los valores del parámetro a .
- (b) Para $a = 1$ obtén los puntos críticos de f .
- (c) Para $a = 1$ clasifica los los puntos críticos de f obtenidos en el apartado anterior.

(8) Considerar la función $f(x, y, z) = x + y + z$ y el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1\}$.

- (a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A .
 - (b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange y clasificar los extremos de f en A .
-