Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. 6 de Septiembre de 2005.

IMPORTANTE:

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** No entregar el papel en sucio. Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa $0'5$ puntos.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x+by+z &= 1\\ y+az &= b\\ x+(b-1)y+2z &= 1 \end{aligned}$$

donde a y b son parámetros.

(a) Determina, según los valores de los parámetros a y b, si el sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

(b) Resolver el sistema anterior para los valores de los parámetros a y b para los que el sistema es compatible indeterminado.

(a) La matriz ampliada asociada al sistema es

$$(A|b)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1\\ 0 & 1 & a & b\\ 1 & b-1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Realizando operaciones elementales por filas obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1\\ 0 & 1 & a & b\\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1\\ 0 & 1 & a & b\\ 0 & 0 & a+1 & b \end{array}\right)$$

Observamos que si $a\neq -1$, entonces $\text{rango}(A)=3=\text{rango}(A|b)$ y por el teorema de Rouché–Frobenius, el sistema es compatible determinado.

Supongamos ahora que $a=-1$. En este caso, $\text{rango}(A)=2$. Por otra parte

$$\text{rango}(A|b)=\begin{cases} 3 & \text{Si } b\neq 0,\\ 2 & \text{Si } b=0. \end{cases}$$

Utilizando el teorema de Rouché–Frobenius, concluimos que

$$\begin{cases} a\neq -1, \quad b\in\mathbb{R} & \text{el sistema es compatible determinado,}\\ a=-1, \quad b\neq 0 & \text{el sistema es incompatible}\\ a=-1, \quad b=0 & \text{el sistema es compatible indeterminado, con un parámetro.} \end{cases}$$

(b) En el apartado anterior hemos probado que el sistema es compatible indeterminado cuando $a=-1$, $b=0$. Además, en este caso y operando con las ecuaciones también obtuvimos en el apartado a) que el sistema propuesto es equivalente a otro sistema cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & b & 1 & 1\\ 0 & 1 & a & b\\ 0 & 0 & a+1 & b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Tomando z como parámetro, obtenemos que $y=z$, $x=1-z$. El conjunto de soluciones es

$$\{(1-z,z,z) : z\in\mathbb{R}\}$$

(2) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & a+1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcular el polinomio característico y los valores propios.

(b) Para $a = 0$, comprobar que la matriz A es diagonalizable y hallar la matriz de paso (también llamada matriz cambio de base).

(c) Estudiar para qué valores $a \neq 0$, la matriz A es diagonalizable.

(a) Desarrollando por la segunda fila obtenemos que el polinomio característico es $(2-\lambda)^2(1-\lambda)$. Por tanto, los valores propios son

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1$$

independientemente del valor del parámetro a.

(b) Vamos a calcular los espacios de vectores propios. En primer lugar, calculamos el espacio $S(1)$. Es la solución del sistema

$$\begin{aligned} x + ay + (a+1)z =& 0 \\ y =& 0 \\ ay =& 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $y = 0$, $x = -(a+1)z$. Por tanto,

$$S(1) =< (-(a+1), 0, 1) >$$

Calculamos ahora $S(2)$. Este espacio es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{aligned} ay + (a+1)z =& 0 \\ ay - z =& 0 \end{aligned}$$

vemos que este sistema es equivalente a

$$z = ay \qquad a(2+a)y = 0$$

Por tanto,

$$S(2) = \begin{cases} < (1,0,0) > & \text{Si } a \neq 0 \text{ y } a \neq -2, \\ < (1,0,0), (0,1,a) > & \text{Si } a = 0 \text{ ó } a = -2. \end{cases}$$

En particular, si $a = 0$, vemos que

$$S(2) =< (1,0,0), (0,1,0) >$$

por lo que $\dim(S(2)) = 2$ y la multiplidad del valor propio 2 coincide con la dimensión de $S(2)$. Por tanto la matriz es diagonalizable. La forma diagonal es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso es

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Hemos visto que los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 1$ y que

$$S(2) = \begin{cases} < (1,0,0) > & \text{Si } a \neq 0 \text{ y } a \neq -2, \\ < (1,0,0), (0,1,a) > & \text{Si } a = 0 \text{ ó } a = -2. \end{cases}$$

es decir

$$\dim(S(2)) = \begin{cases} 1 & \text{Si } a \neq 0 \text{ y } a \neq -2, \\ 2 & \text{Si } a = 0 \text{ ó } a = -2. \end{cases}$$

Por tanto, la matriz es diagonalizable si y sólo si $a = 0$ ó $a = -2$.

(3) Dados los vectores $\{(-1,2,1,-3),(3,-1,1,-2),(2,1,2,-5),(2,-4,-2,6)\}$ de $\mathbb{R}^4$.

(a) Calcular la dimensión del espacio generado por ellos.

(b) Obtener las ecuaciones que determinan el espacio que generan.

(a) Consideramos la matriz siguiente (las columnas son los vectores del enunciado)

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} -1 & 3 & 2 & 2 & x \\ 2 & -1 & 1 & -4 & y \\ 1 & 1 & 2 & -2 & z \\ -3 & -2 & -5 & 6 & t \end{array}\right)$$

Haciendo operaciones elementales por filas obtenemos que

$$\left(\begin{array}{rrrr|c} -1 & 3 & 2 & 2 & x \\ 0 & 5 & 5 & 0 & y+2x \\ 0 & 4 & 4 & 0 & z+x \\ 0 & -11 & -11 & 0 & t-3x \end{array}\right)$$

de donde obtenemos:

(a) La dimensión del espacio generado por los vectores es

$$\begin{aligned} \operatorname{rango}\left(\{(-1,2,1,-3),(3,-1,1,-2),(2,1,2,-5),(2,-4,-2,6)\}\right) &= \operatorname{rango}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rango}\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -11 & -11 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 2 \end{aligned}$$

y

(b) los vectores del espacio generado por los vectores verifican las ecuaciones

$$\begin{aligned} 5(z+x) &= 4(y+2x) \\ 5(t-3x) &= -11(y+2x) \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} 3x+4y-5z &= 0 \\ 7x+11y+5t &= 0 \end{aligned}$$

(4) Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x + |y| \leq 1\}$.

(a) Dibujar el conjunto A.

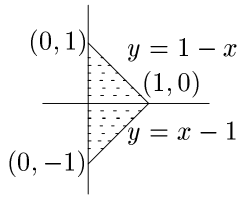
(b) Dibujar la frontera, el interior y la clausura del conjunto A. ¿Es A cerrado, abierto, convexo, acotado o compacto?

(c) Considerar la función

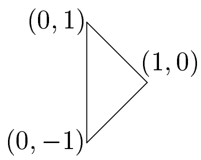
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{(1-x)^2} & \text{Si } x \neq 1, \\ 0 & \text{Si } x = 1. \end{cases}$$

Determinar si la función f alcanza máximo o mínimo en el conjunto A.

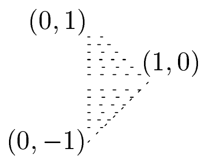
(a) El conjunto A es



(b) La frontera (∂A) de A es



el interior de A es $A \setminus \partial A$,



y la clausura de A es

$$\bar{A} = A \cup \partial A = A$$

(ya que $\partial A \subset A$). Por lo tanto, A es cerrado, no es abierto (porque $\partial A \cap A \neq \emptyset$), es compacto (cerrado y acotado) y convexo.

(c) Observamos que el denominador es positivo y se anula para $x = 1$. Para este valor de $x = 1$, el numerador es estrictamente positivo. De aquí deducimos que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = +\infty$$

Como el punto $(1,0) \in A$, la función no alcanza máximo en el conjunto A. Por otra parte, tanto el numerador como el denominador son positivos por lo que $f(x,y) \geq 0 = f(0,0) = f(1,0)$ para todo $(x,y) \in A$. Es decir, f alcanza un mínimo global en los puntos $(0,0)$ y $(1,0)$.

(5) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estudiar si la función f es continua en el punto $(0,0)$).
(b) Determinar si existen las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$).
(c) Estudiar si la función f es diferenciable en el punto $(0,0)$).

(a) Tomando límites iterados

$$\lim_{x\to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y) = 0$$
$$\lim_{y\to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) = 1$$

como no coinciden, la función no es continua en $(0,0)$.

(b) Las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \qquad \text{(No existe))}$$

ya que

$$f(t,0) = 0 = f(0,0), \qquad f(0,t) = 1$$

para todo $0 \neq t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \qquad \text{no existe}$$

(c) La función no es diferenciable ya que no es continua en $(0,0)$, según el apartado a). (También se podría deducir que no es diferenciable porque en el apartado (b) se ha probado que no existe una de las parciales en $(0,0)$).

(6) Dada la función $f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - 3x - 8y$,

(a) Calcula el polinomio de Taylor de orden dos de f en torno al punto $(0,0)$.

(b) Determina si la función f es cóncava o convexa en $\mathbb{R}^2$.

(a) Calculamos

$$f(0,0) = 0, \qquad \nabla f(0,0) = (4x^3 + 2xy^2 - 3, 2x^2y + 4y^3 - 8)\big|_{x=y=0} = (-3,-8)$$

y la matriz Hessiana

$$\mathrm{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 + 12y^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{x=y=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que el polinomio de Taylor de orden dos de f en torno al punto $(0,0)$ es

$$P_2(x.y) = -3x - 8y$$

(b) En el apartado anterior hemos calculado la matriz Hessiana de f en cualquier punto (x,y) del plano. Los menores principales son

$$D_1 = 12x^2 + 2y^2$$
$$D_2 = 24x^4 + 24y^4 + 132x^2y^2$$

por lo que $\mathrm{H}\, f(x,y)$ es definida positiva en todos los puntos $(x,y) \neq (0,0)$. Por lo tanto, f es convexa en todo el plano $\mathbb{R}^2$.

(7) Dada la función $f(x,y) = y^2x - ay^2 - ax^2$

(a) Comprueba que el punto $(0,0)$ es un punto crítico de f para cualquier valor de a y estudia de qué tipo es según los valores del parámetro a.

(b) Para $a = 1$ obtén los puntos críticos de f.

(c) Para $a = 1$ clasifica los los puntos críticos de f obtenidos en el apartado anterior.

(a) Los puntos críticos satisfacen la condición necesaria de primer orden, es decir: $\nabla f(x,y) = (0,0)$ o bien no existe. Haciendo las dos derivadas parciales obtenemos $\nabla f(x,y) = (y^2 - 2ax, 2yx - 2ay)$ sustituyendo por $(0,0)$ queda $\nabla f(0,0) = (0,0)$, independientemente del valor de a.

Para saber si es un máximo local, mínimo local o punto de silla, aplicamos la condición suficiente de segundo orden. Para ello construimos la matriz hessiana:

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} -2a & 2y \\ 2y & 2x - 2a \end{pmatrix}$$

y sustituimos por el punto $(0,0)$

$$\mathrm{H}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} -2a & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix}$$

Estudiamos su signo según los valores de a a partir de la sucesión de menores principales $A_{11} = -2a, \quad A_{22} = |A| = 4a^2$ y obtenemos que:

- si $a > 0$ $A_{11} < 0, \quad A_{22} = |A| = 4a^2 > 0$ y $\mathrm{H}\, f(0,0)$ es definida negativa. Luego en $(0,0)$ f alcanza un máximo local o relativo.
- si $a < 0$ $A_{11} > 0, \quad A_{22} = |A| = 4a^2 > 0$ y $\mathrm{H}\, f(0,0)$es definida positiva. Luego en $(0,0)$ f alcanza mínimo local o relativo.
- si $a = 0$ $A_{11} = 0, \quad A_{22} = |A| = 0$ y la condición suficiente no decide. Sustituyendo $a = 0$, tenemos que $f(x,y) = y^2x$. Ahora observamos que en un entorno del $(0,0)$ cuando $x < 0$, se verifica que $f(x,y) < f(0,0)$ y cuando $x > 0$ $f(x,y) > f(0,0)$. Luego en $(0,0)$ f tiene un punto de silla.

(b) Cuando $a = 1$ la función es $f(x,y) = y^2x - y^2 - x^2$. Los puntos críticos deben satisfacer la condición necesaria de primer orden: $\nabla f(x,y) = (0,0)$ o bien no existe. Haciendo las dos derivadas parciales obtenemos

$$\nabla f(x,y) = (y^2 - 2x, 2yx - 2y)$$

e igualando a 0 quedan las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} y^2 - 2x & = & 0 \\ 2yx - 2y & = & 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{rcl} y^2 - 2x & = & 0 \\ 2y(x-1) & = & 0 \end{array}\right\}$$

de la segunda ecuación obtenemos que $y = 0$ ó $x - 1 = 0$. Sustituyendo sucesivamente estos dos valores en la primera obtenemos que los puntos críticos son $(0,0)$, $(1,\sqrt{2})$ y $(1,-\sqrt{2})$. Dado que el gradiente existe siempre al tratarse de una función polinómica, los puntos anteriores son todos los puntos críticos posibles.

(c) Para clasificarlos aplicamos la condición suficiente de segundo orden. Para ello construimos la matriz hessiana

$$\mathrm{H}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 2y \\ 2y & 2x - 2 \end{pmatrix}$$

y estudiamos su signo sobre los puntos críticos. El punto $(0,0)$ ya ha sido estudiado en el apartado (a).

Repitiendo el mismo análisis para los puntos $(1,\sqrt{2})$ y $(1,-\sqrt{2})$ obtenemos

$$\mathrm{H}\, f(1,\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{H}\, f(1,-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

En ambos casos, la sucesión de menores principales es la misma: $|A_{11}| = -2 < 0$, $|A_{22}| = |A| = -2 < 0$. Luego las matrices hessianas $\mathrm{H}\, f(1,\sqrt{2})$ y $\mathrm{H}\, f(1,-\sqrt{2})$ son indefinidas y ambos son puntos de silla.

(8) Considerar la función $f(x,y,z)=x+y+z$ y el conjunto $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+2y^2+4z^2=1\}$.

(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.

(b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange y clasificar los extremos de f en A.

(a) El lagrangiano es

$$L(x,y,z)=x+y+z+\lambda(1-x^2-2y^2-4z^2)$$

y las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x \\ 1 &= 4\lambda y \\ 1 &= 8\lambda z \end{aligned}$$

junto con la restricción

$$x^2+2y^2+4z^2=1$$

(b) De las condiciones de primer orden obtenemos que

$$\frac{1}{\lambda}=2x=4y=8z$$

por lo que

$$x=4z, \qquad y=2z$$

y sustituyendo en la restricción obtenemos $28z^2=1$. De donde

$$z=\frac{\pm 1}{2\sqrt{7}}$$

Las soluciones son

$$A=\left(\frac{2}{\sqrt{7}},\frac{1}{\sqrt{7}},\frac{1}{2\sqrt{7}}\right) \qquad B=\left(\frac{-2}{\sqrt{7}},\frac{-1}{\sqrt{7}},\frac{-1}{2\sqrt{7}}\right)$$

Como

$$f(A)=\frac{\sqrt{7}}{2}, \qquad f(B)=\frac{-1}{2\sqrt{7}}$$

concluimos que A es el (único) máximo y B es el (único) mínimo.