Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. Septiembre de 2003.

IMPORTANTE:

- **DURACION DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** No entregar el papel en sucio. Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa $0'5$ puntos.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) La función $f(x,y) = 3x^2 + e^{xy}$ representa el beneficio de una empresa cuando produce x unidades del bien 1 e y unidades del bien 2.
  (a) Hallar el gradiente de f en el punto $(1,0)$.
  (b) El año pasado la empresa produjo 1 unidad del bien 1 y 0 unidades del bien 2. Este año la empresa se ve obligada a producir $(1+\Delta x, \Delta y)$. Sabiendo que Δx y Δy son muy pequeños y que la empresa los elige de forma que el beneficio aumente lo máximo posible, calcular aproximadamente

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

(2) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2+x_3, 2x_1+2x_2+2x_3, x_1+x_2+3x_3+x_4)$$

  (a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas y las dimensiones del núcleo y de la imagen.
  (b) Hallar una base de la imagen de f y una base del núcleo de f.
  (c) Hallar un sistema de ecuaciones linealmente independientes del núcleo y de la imagen.

(3) Dado el sistema de ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x+ay+2z=b \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$$

  (a) Discute el sistema para los distintos valores de a y b.
  (b) Resuelve el sistema en el caso en que $a=2$, $b=2$.

(4) Dada la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

  (a) Halla el polinomio característico y los autovalores.
  (b) Comprueba que la matriz es diagonalizable.
  (c) Halla la matriz diagonal correspondiente y la matriz de cambio de base.

(5) Dado el conjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, xy \geq 1\}$$

se pide:
  (a) Dibuja el conjunto $\mathcal{D}$.
  (b) Dibuja las curvas de nivel de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{x+y}$$

  (c) Utilizando los apartados anteriores, justifica razonadamente si la función del apartado anterior alcanza el valor máximo o el valor mínimo en $\mathcal{D}$. (Observar que no se pide calcular dicho(s) valor(es))

(6) Considera la función $f(x,y) = -8ax^2 - 2by^2 + cxy + 5x - 3y + 2$.

(a) Discutir, según los valores de los parámetros a, b y c, cuándo f es estrictamente cóncava, sabiendo que $ab = 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

(b) Calcular los valores de a, b y c sabiendo que el polinomio de Taylor de segundo orden de f alrededor del punto $(1, 0)$ es

$$-x^2 - 16y^2 + 5x - 3y + 2$$

---

(7) Dada la función $f(x, y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$.

(a) Obtener los puntos críticos y clasificarlos.

(b) Obtener los máximos abiertos donde f es estrictamente concava y estrictamente convexa.

(c) Obtener los extremos absolutos.

---

(8) Considerar la función $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 11z^2$ y el conjunto $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$.

(a) Escribir las ecuaciones de Lagrange que verifican los puntos extremos de f sobre el conjunto M.

(b) Determinar los puntos extremos de f sobre el conjunto M.
