Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. Septiembre de 2003.

IMPORTANTE:

- **DURACION DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** No entregar el papel en sucio. Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él.
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Cada apartado del examen puntúa $0'5$ puntos.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) La función $f(x,y) = 3x^2 + e^{xy}$ representa el beneficio de una empresa cuando produce x unidades del bien 1 e y unidades del bien 2.

(a) Hallar el gradiente de f en el punto $(1,0)$.

(b) El año pasado la empresa produjo 1 unidad del bien 1 y 0 unidades del bien 2. Este año la empresa se ve obligada a producir $(1+\Delta x, \Delta y)$. Sabiendo que Δx y Δy son muy pequeños y que la empresa los elige de forma que el beneficio aumente lo máximo posible, calcular aproximadamente

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}$$

(a) El gradiente de f en un punto cualquiera es $\nabla f(x,y) = (6x + ye^{xy}, xe^{xy})$ y en el punto $(1,0)$ es $\nabla f(1,0) = (6,1)$.

(b) La empresa pasa de producir la cesta $(1,0)$ a producir la cesta $(1+\Delta x, \Delta y)$. El cambio en la producción es el vector

$$u = (1+\Delta x, \Delta y) - (1,0) = (\Delta x, \Delta y)$$

para que el aumento en el beneficio sea máximo, la dirección de u y de $\nabla f(1,0)$ debe ser la misma, es decir $u = \lambda \nabla f(1,0)$ con $\lambda > 0$. Por tanto,

$$(\Delta x, \Delta y) = \lambda(6,1)$$

por lo que

$$\Delta x = 6\lambda, \quad \Delta y = \lambda$$

Luego

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = 6$$

(2) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4)$$

(a) Hallar la matriz de f respecto de las bases canónicas y las dimensiones del núcleo y de la imagen.
(b) Hallar una base de la imagen de f y una base del núcleo de f.
(c) Hallar un sistema de ecuaciones linealmente independientes del núcleo y de la imagen.

(a) La matriz de f respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

La segunda fila es el doble de la primera, por lo que $\text{rango}(A) \leq 2$. Por otra parte, el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, por lo que $\text{rango}(A) = 2$. Recordando que $\dim(\text{Im}(f)) = \text{rango}(A)$ y que $4 = \dim(\text{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$, vemos que $\dim(\text{Im}(f)) = 2$, $\dim(\ker(f)) = 2$.

(b) La imagen de f es un subespacio de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2, generado por las columnas de la matriz A. Es suficiente tomar dos columnas de A que sean linealmente independientes. Una base $\text{Im}(f)$ es $\{(1, 2, 1), (0, 0, 1)\}$.

El núcleo está formado por las soluciones del siguiente sistema homogéneo lineal

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & = 0 \end{array}\right\} \quad \equiv \quad \left.\begin{array}{ll} x_1 + x_2 + x_3 & = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & = 0 \end{array}\right\}$$

Sustituyendo $x_3 = -(x_1 + x_2)$ en la segunda ecuación, obtenemos que las soluciones son de la forma

$$x_4 = -2x_3, \quad x_2 = -x_1 - x_3$$

es decir $\ker(f) = \{(x_1, -x_1 - x_3, x_3, -2x_3) : x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$. Y una base es $\{(1, -1, 0, 0), (0, -1, 1, -2)\}$

(c) Por el apartado anterior, el núcleo está definido por las ecuaciones $x_4 + 2x_3 = 0, \quad x_1 + x_3 + x_2 = 0$

Por otra parte, la imagen de f está generada por $\{(1, 2, 1), (0, 0, 1)\}$. Utilizando el método de Gauss,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} x \\ y - 2x \\ z \end{array}$$

y vemos que un conjunto de ecuaciones para $\text{Im}\, f$ es $y - 2x = 0$.

(3) Dado el sistema de ecuaciones,

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ 2x+ay+2z=b \\ ax+y+z=1 \end{array}\right\}$$

(a) Discute el sistema para los distintos valores de a y b.
(b) Resuelve el sistema en el caso en que $a=2$, $b=2$.

(a) La matriz asociada al sistema es $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 & b \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Observemos en primer lugar que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 2 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a^2+3a-2 = -(a-1)(a-2) = 0 \longleftrightarrow a=1$ ó $a=2$, de manera que si $a \neq 1, a \neq 2$, el rango de A es 3. Puesto que el rango de la matriz ampliada asociada al sistema $A|B$ verifica $\text{rango}(A) \leq \text{rango}(A|B) \leq 3$, deducimos que si $a \neq 1, a \neq 2$, $\text{rango}(A|B) = 3$.

$\boxed{\textit{Caso } a=1\textit{:}}$ En este caso, $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. El menor de orden dos $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ tiene determinante no nulo, luego $\text{rango}(A) = 2$. Por otra parte, como la primera y la tercera filas de la matriz son iguales, tenemos que $\text{rango}(A|B) = 2$ para cualquier valor de b y el sistema es compatible indeterminado.

$\boxed{\textit{Caso } a=2\textit{:}}$ De manera similar al caso $a=1$, obtenemos $A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & b \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$. Claramente, $\text{rango}(A) = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$. Calculemos el rango de $A|B$. Para ello, calculemos el determinante del menor $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & b \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cuyo valor es $b-2$. Con estos resultados, obtenemos que si $b=2$, entonces $\text{rango}(A|B) = 2$ y si $b \neq 2$, $\text{rango}(A|B) = 3$.

Así, por el Teorema de Rouché-Frobenius, nuestro sistema será:

- COMPATIBLE DETERMINADO: Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$.
- COMPATIBLE INDETERMINADO: Si $\{a=1\}$ o si $\{a=2$ y $b=2\}$.
- INCOMPATIBLE: En los demás casos, es decir, Si $\{a=2$ y $b \neq 2\}$

(b) Nuestro sistema es:

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 2x+y+z=1 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{c} x=1-y-z \\ 2x+2y+2z=2 \\ 2x+y+z=1 \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{c} x=1-y-z \\ 2x+y+z=1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c} x=1-y-z \\ z=1-y \end{array}\right. \equiv \left\{\begin{array}{c} x=0 \\ z=1-y \end{array}\right.$$

Elegimos como parámetro y y vemos que la solución es:

$$z=1-y,\ x=0,\ y \in \mathbb{R}$$

(4) Dada la matriz siguiente

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Halla el polinomio característico y los autovalores.
(b) Comprueba que la matriz es diagonalizable.
(c) Halla la matriz diagonal correspondiente y la matriz de cambio de base.

(a) El polinomio característico es

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} &= (3-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)\,(3-\lambda)^2 \,. \end{aligned}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$.

(b) Como $\dim S(-1) = 1$, la matriz es diagonalizable si y sólo si $\dim S(3) = 2$. Calculamos los espacios de vectores propios.

El subespacio $S(3)$ de vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{rcl} -y & = & 0 \\ -4y & = & 0 \\ -y & = & 0 \end{array}\right\}$$

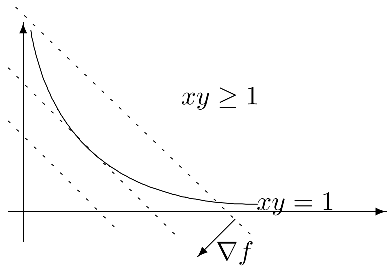
por lo que $S(3) = \{(x,0,z) : x, y \in \mathbb{R}\} =< (1,0,0), (0,0,1) >$. Como $\dim S(3) = 2$, la matriz es diagonalizable.

(c) Calculamos $S(-1)$, el subespacio de vectores propios asociados al valor propio $\lambda_3 = -1$. El sistema que lo determina es

$$\left.\begin{array}{rcl} 4x - y & = & 0 \\ -y + 4z & = & 0 \end{array}\right\}$$

por lo que $S(-1) = \{(x, 4y, x) : x \in \mathbb{R}\} =< (1,4,1) >$. Por tanto, $A = PDP^{-1}$ con

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



(5) Dado el conjunto $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ definido por

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, xy \geq 1\}$$

se pide:

(a) Dibuja el conjunto $\mathcal{D}$.

(b) Dibuja las curvas de nivel de la función

$$f(x, y) = \frac{1}{x + y}$$

(c) Utilizando los apartados anteriores, justifica razonadamente si la función del apartado anterior alcanza el valor máximo o el valor mínimo en $\mathcal{D}$. (Observar que no se pide calcular dicho(s) valor(es))

(a) En el gráfico el conjunto $\mathcal{D}$ es el que esta por encima de la curva de nivel $xy = 1$. Observemos que es la parte por encima del gráfico de la función $y = 1/x$ con $x > 0$.

(b) Las curvas de nivel de la función f están representadas por las líneas rectas discontinuas. Obsérvese que la curva de nivel dada for $f(x, y) = c$ coincide con la curva de nivel de $x + y = 1/c$, que representa a la recta $y = 1/c - x$.

(c) En la figura se ha representado el gradiente ∇f, que como se sabe apunta en la dirección en la que la función crece. Como se ve la función alcanza un máximo en el punto en el que la curva de nivel de f es tangente a la curva $xy = 1$, ya que se observa gráficamente que en todas las demás curvas de nivel de f que intersectan a $\mathcal{D}$, el valor de f es más pequeño.

Por otra parte, partiendo de cualquier punto de $\mathcal{D}$ y moviéndonos en la dirección de $-\nabla f$ permanecemos dentro del conjunto $\mathcal{D}$ y la función f decrece estrictamente, por lo que no se alcanza ningún mínimo en $\mathcal{D}$.

(6) Considera la función $f(x,y) = -8ax^2 - 2by^2 + cxy + 5x - 3y + 2$.

(a) Discutir, según los valores de los parámetros a, b y c, cuándo f es estrictamente cóncava, sabiendo que $ab = 1$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

(b) Calcular los valores de a, b y c sabiendo que el polinomio de Taylor de segundo orden de f alrededor del punto $(1,0)$ es

$$-x^2 - 16y^2 + 5x - 3y + 2$$

(a) El gradiente de f es

$$\nabla f(x,y) = (-16ax + cy + 5, -4by + cx - 3)$$

y el Hessiano es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -16a & c \\ c & -4b \end{pmatrix}$$

Los menores principales son, por tanto,

$$D_1 = -16a, \quad D_2 = 64ab - c^2 = 64 - c^2$$

pues $ab = 1$. La función es estrictamente cóncava cuando $D_1 < 0$, $D_2 > 0$. La primera desigualdad se cumple obviamente pues $a > 0$, por hipótesis. Finalmente, la desigualdad $64 - c^2 > 0$ es equivalente a

$$|c| < 8$$

(b) En primer lugar, $f(1,0) = -8a + 7$. Por otro lado el gradiente de f en el punto $(1,0)$ es

$$\nabla f(1,0) = (-16a + 5, c - 3)$$

y el Hessiano es

$$Hf(1,0) = \begin{pmatrix} -16a & c \\ c & -4b \end{pmatrix}$$

por tanto el polinomio de Taylor de orden 2 alrededor del punto $(1,0)$ es

$$f(1,0) + \nabla f(1,0) \cdot (x-1, y-0) + \frac{1}{2}(x - 1(y-0) \begin{pmatrix} -16a & c \\ c & -4b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} =$$
$$= -8ax^2 - 2by^2 + cxy + 5x - 3y + 2$$

Igualando este polinomio a

$$-x^2 - 16y^2 + 5x - 3y + 2$$

vemos que

$$a = \frac{1}{8}, \quad b = 8, \quad c = 0$$

(7) Dada la función $f(x,y) = -5x^2 - 8y^2 - 2xy + 42x + 102y$.

(a) Obtener los puntos críticos y clasificarlos.
(b) Obtener los máximos abiertos donde f es estrictamente concava y estrictamente convexa.
(c) Obtener los extremos absolutos.

(a)
El gradiente es $\nabla f(x,y) = (-10x - 2y + 42, -16y - 2x + 102)$. Igualando $\nabla f(x,y) = 0$, obtenemos que el único punto crítico es $(x,y) = (3,6)$. El Hessiano en cualquier punto (x,y) es

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -16 \end{pmatrix}$$

Atendiendo a los menores principales de ordenes 1 y 2, M_1 y M_2, vemos que $M_1 = -10 < 0$; $M_2 = 160 - 4 > 0$. Luego Hf es definido negativo y el punto $(3,6)$ es un máximo relativo

(b) Como Hf es definida negativa en todo $\mathbb{R}^2$, f es estrictamente cóncava en todo $\mathbb{R}^2$ y no es estrictamente convexa en ningún punto.

c) Dado que $(3,6)$ es el <u>único</u> punto crítico y f es estrictamente cóncava en $\mathbb{R}^2$, $(3,6)$ es máximo absoluto. Además, f no puede tener mínimo absoluto ni relativo, pues no tiene más puntos críticos. Otra forma de concluir que f no tiene mínimo absoluto sería observando que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x,0) = \lim_{x\to+\infty} -5x^2 + 42x = -\infty$$

(8) Considerar la función $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 11z^2$ y el conjunto $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$.

(a) Escribir las ecuaciones de Lagrange que verifican los puntos extremos de f sobre el conjunto M.

(b) Determinar los puntos extremos de f sobre el conjunto M.

(a) El lagrangiano del problema de maximización es

$$L = x^2 - y^2 + 11z^2 + \lambda(9 - x^2 - y^2 - z^2)$$

Por tanto, las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2x - 2\lambda x = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= -2y - 2\lambda y = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 22z - 2\lambda z = 0 \\
x^2 + y^2 + z^2 &= 9
\end{aligned}$$

(b) Simplificando las ecuaciones de Lagrange del apartado anterior obtenemos

$$\begin{aligned}
x(1-\lambda) &= 0 \\
y(1+\lambda) &= 0 \\
z(11-\lambda) &= 0 \\
x^2 + y^2 + z^2 &= 9
\end{aligned}$$

La última ecuación excluye la posibilidad $x = y = z = 0$. Las soluciones de este sistema corresponden a los valores de

$$\lambda = 1, -1, 11$$

Por tanto, los puntos críticos son

$$\begin{aligned}
\lambda = 1 &\quad \text{puntos críticos: } (\pm 3, 0, 0) \\
\lambda = -1 &\quad \text{puntos críticos: } (0, \pm 3, 0) \\
\lambda = 11 &\quad \text{puntos críticos: } (0, 0, \pm 3)
\end{aligned}$$

Sustituyendo en la función objetivo vemos inmediatamente que

$$\begin{aligned}
f(\pm 3, 0, 0) &= 9 \\
f(0, \pm 3, 0) &= -9 \\
f(0, 0, \pm 3) &= 99
\end{aligned}$$

Luego f alcanza un máximo en los puntos $(0,0,\pm 3)$ y un mínimo en los puntos $(0,\pm 3,0)$.