

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía Exámen final de Matemáticas II. Septiembre de 2001 Modelo

Apellidos:

Nombre:

DNI:

Titulación:

Grupo:

-
1. En el espacio vectorial real \mathbb{R}^3 se considera el subespacio W generado por el sistema $S = \{(1, 1, a), (1, a, 1), (a, 1, 1)\}$. Razona la veracidad de las siguientes afirmaciones:
- a) Si $a = 1$ un sistema generador de W $\{(1, 1, 1), (-2, -2, -2)\}$ y la dimensión de W es 2.
 - b) Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ una base de W es la canónica de \mathbb{R}^3 .
 - c) La dimensión de W es 2 si $a = -2$
-

2. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por $f(x, y) = (x + y, 3x + 3y, 2x + 2y, -3x - 3y)$.
- a) Determinar la matriz de f respecto de las bases canónicas.
 - b) Calcular la dimensión de $N(f)$ e $\text{Im}(f)$ y dar una base para cada uno de estos subespacios.
-

3. Encontrar los máximos y los mínimos de la función x^2y sobre el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 3\}$.
-

4. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

- a) Calcula el polinomio característico y comprueba que $\lambda = 1$ y $\lambda = -1$ son autovalores.
 - b) Estudia si es o no diagonalizable y, en caso afirmativo, encuentra la matriz diagonal J y una matriz de paso P de forma que $A = PJP^{-1}$.
-

5. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

- a) Estudiar si f es continua en $(0, 0)$.
 - b) Calcula las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.
-

-
6. Dado el sistema de ecuaciones
$$\left. \begin{array}{l} 3x - y + 2z = 1 \\ x + 4y + z = \alpha \\ 2x - 5y + \beta z = -2 \end{array} \right\},$$
 se pide. Discutir y resolver el sistema según los distintos valores de los parámetros α y β .

1 punto

7. Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 1, y \geq 1\}$. Se pide:

a) Dibujar el conjunto.

b) Estudiar si el conjunto A es cerrado, acotado y/o convexo.

c) Considera $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{(x-2)^2 + (y-2)^2}$

Estudia si f alcanza máximo y/o mínimo global en A .

8. Dada $f(x, y) = b^2x^2 - axy + 2y^2$. Hallar para qué valores de a y b la función es estrictamente convexa.

1 punto:
