Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2011.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 1 punto.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

(1) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} (b+2)x + by + z &= 1 \\ (b+2)x + y + bz &= 1 \\ (b+2)x + y + z &= b \end{cases}$$

donde $b \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

(a) Clasifique el sistema según los valores de b.

(b) Resuelva el sistema anterior para los valores de b para los cuales el sistema tenga infinitas soluciones.

---

(2) Dado el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$,

(a) Dibuje el conjunto A, su frontera y su interior. Determine si el conjunto A es cerrado, abierto, acotado, compacto y/o convexo.

(b) Dada la función $f(x,y) = x + y$, justifique que alcanza un máximo y un mínimo globales en el conjunto A. Dibuje las curvas de nivel de f indicando la dirección de crecimiento. Utilice las curvas de nivel para calcular el máximo y el mínimo globales de f en A.

---

(3) Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Pruebe que la función f es continua en el punto $(0,0)$.

(b) Calcule las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$. Calcule la derivada de f en el punto $(0,0)$ según el vector $v = (1,1)$. ¿Es la función f diferenciable en el punto $(0,0)$?

---

(4) Se considera la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + ax^2y$, donde $a \neq 0$.

(a) Halle los puntos críticos de la función anterior, determinando en qué cuadrante se hallan, en términos del parámetro a.

(b) Clasifique los puntos críticos de la función anterior.

---

(5) Considere la función

$$f(x,y) = 2x^4 + (y-1)^2$$

y el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + 2y = 22\}$.

(a) Halle las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A y determine los puntos que satisfacen las citadas ecuaciones.

(b) Sabiendo que f alcanza un mínimo global en el conjunto A, hallarlo (sin necesidad de demostrar que existe). Asimismo, probar que f **NO** alcanza un máximo global en el conjunto A.
