Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Junio de 2011.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 1 punto.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

(1) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+az & = & b \\ x+ay+z & = & 1 \\ ax+y+z & = & 1 \end{array}\right\}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

(a) Clasifique el sistema según los valores de a y b.

(b) Resuelva el sistema anterior para el caso en que $a = b = -2$.

---

(2) Se considera la ecuación $xy - e^{2z}y + zx^2 = 0$.

(a) Justifique, aplicando el teorema de la función implícita, que la ecuación anterior define a z como una función de x e y en un entorno del punto $(1, 2, 0)$.

(b) Obtenga $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1, 2)$ y $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 2)$.

---

(3) Considere el problema de optimización siguiente

$$\left.\begin{array}{ll} \max(\min) & (x+y)^2 \\ \text{s.a.} & 2x^2 + y^2 = 4 \end{array}\right\}$$

(a) Escriba y resuelva las ecuaciones de Lagrange.

(b) Caracterice las soluciones obtenidas en el apartado anterior.

---

(4) Se considera la función $f(x, y, z) = 2ax^2 + 4y^2 + z^2 + 8xy + 2yz$, donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) Determine qué valores debe tomar a para que la función f sea convexa en $\mathbb{R}^3$.

(b) Para $a > 3$, halle los puntos críticos de f y clasifíquelos en extremos locales y/o globales.

---

(5) Considere el problema de optimización siguiente

$$\left.\begin{array}{ll} \max & x^2 + 4y \\ \text{s.a.} & 2x + 2y \leq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{array}\right\}$$

(a) Halle las ecuaciones de Kuhn-Tucker asociadas al problema de optimización anterior.

(b) Determine los puntos que verifican las ecuaciones de Kuhn-Tucker del apartado anterior.
