Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. Junio de 2011.

Apellidos:	Nombre:	
DNI:	Titulación:	Grupo:

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 1 punto.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

(1) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left. \begin{aligned} x + y + az &= b \\ x + ay + z &= 1 \\ ax + y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son parámetros.

- (a) Clasifique el sistema según los valores de a y b .
(b) Resuelva el sistema anterior para el caso en que $a = b = -2$.
-

Solución:

(a) La matriz ampliada del sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & b \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Haciendo operaciones elementales por filas, obtenemos los siguientes sistemas equivalentes

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & b \\ 0 & a-1 & 1-a & 1-b \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 1-ab \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & b \\ 0 & a-1 & 1-a & 1-b \\ 0 & 0 & 2-a^2-a & 2-ab-b \end{array} \right)$$

Por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado si y sólo si $(1-a)(a^2+a-2) \neq 0$. Como las raíces de a^2+a-2 son $a = -2$ y $a = 1$, el sistema es compatible determinado si y sólo si $a \neq -2$ y $a \neq 1$.

Si $a = -2$, el sistema original es equivalente al sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & b \\ 0 & -3 & 3 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 2+b \end{array} \right)$

que es compatible indeterminado si $b = -2$ e incompatible si $b \neq -2$.

Si $a = 1$, el sistema original es equivalente al sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1-b \\ 0 & 0 & 0 & 2(1-b) \end{array} \right)$

que es compatible indeterminado si $b = 1$ e incompatible si $b \neq 1$. En resumen,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Si } a \neq -2 \text{ y } a \neq 1 & \text{el sistema es compatible determinado,} \\ \text{Si } (a = -2 \text{ ó } a = 1) \text{ y } b = a & \text{el sistema es compatible indeterminado,} \\ \text{En todos los demás casos} & \text{el sistema es incompatible.} \end{array} \right.$$

(b) Sustituyendo $a = b = -2$ en el apartado anterior vemos que el sistema es equivalente al sistema

cuya matriz asociada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$ es decir es equivalente al sistema

$$\left. \begin{aligned} x + y - 2z &= -2 \\ -y + z &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Elegimos el parámetro z y vemos que la solución es

$$x = z - 1, \quad y = z - 1, \quad z \in \mathbb{R}$$

(2) Se considera la ecuación $xy - e^{2z}y + zx^2 = 0$.

(a) Justifique, aplicando el teorema de la función implícita, que la ecuación anterior define a z como una función de x e y en un entorno del punto $(1, 2, 0)$.

(b) Obtenga $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2)$ y $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 2)$.

Solución:

- (a) Llamando $f(x, y, z) = xy - e^{2z}y + zx^2$ a la función que define la única restricción tenemos que
- Al estar f definida por funciones elementales (polinómicas y exponencial), se satisface la condición de ser $\mathcal{C}^1$
 - Si sustituimos el punto en la ecuación, esta se satisface $1 \cdot 2 - e^{2 \cdot 0} \cdot 2 + 0 \cdot 1^2 = 0$
 - Calculando el determinante de la matriz (en este caso una matriz 1×1) de las derivadas parciales respecto de la variable dependiente queda

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1, 2, 0) = -2ye^{2z} + x^2 \Big|_{x=1, y=2, z=0} = -3 \neq 0$$

- (b) Para obtener las derivadas parciales podemos derivar directamente respecto de x en la ecuación y queda

$$y - e^{2z}2\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)y + \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)x^2 + z2x = 0$$

sustituyendo los valores $(1, 2, 0)$

$$2 - 4\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) + \frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = 0$$

y despejando $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = \frac{2}{3}$

Para obtener la derivada parcial de orden dos volvemos a derivar respecto de x y obtenemos:

$$-2y(e^{2z}2\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) + e^{2z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y)) + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, y)x^2 + \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)2x + 2(\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)x + z) = 0$$

sustituyendo los valores $(1, 2, 0)$ y $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2) = \frac{2}{3}$ queda

$$-4(\frac{8}{9} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 2)) + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 2) + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0 \text{ y despejando } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1, 2) = \frac{-8}{27}$$

(3) Considere el problema de optimización siguiente

$$\left. \begin{array}{l} \max(\min) \quad (x+y)^2 \\ \text{s.a.} \quad 2x^2 + y^2 = 4 \end{array} \right\}$$

- (a) Escriba y resuelva las ecuaciones de Lagrange.
(b) Caracterice las soluciones obtenidas en el apartado anterior.
-

Solución:

(a) El lagrangiano asociado al problema de maximización es

$$L = (x+y)^2 + \lambda(4 - 2x^2 - y^2)$$

de donde obtenemos las ecuaciones de Lagrange,

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial x} : \quad 2x + 2y - 4\lambda x = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial L}{\partial y} : \quad 2x + 2y - 2\lambda y = 0$$

$$(3) \quad 2x^2 + y^2 = 4$$

De las ecuaciones (1) y (2) obtenemos que $\lambda(2x - y) = 0$. Si $\lambda = 0$, obtenemos de (1) que $y = -x$ y sustituyendo en (3) obtenemos las soluciones

$$x = \frac{2}{\sqrt{3}}, y = \frac{-2}{\sqrt{3}}, \lambda = 0 \quad x = \frac{-2}{\sqrt{3}}, y = \frac{2}{\sqrt{3}}, \lambda = 0$$

Si $y = 2x$, de la ecuación (3) obtenemos $x^2 = 2/3$. Las soluciones son (el valor de λ se obtiene sustituyendo los valores de x e y en las ecuaciones 1 y 2)

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}, y = 2\sqrt{\frac{2}{3}}, \lambda = \frac{2}{3} \quad x = -\sqrt{\frac{2}{3}}, y = -2\sqrt{\frac{2}{3}}, \lambda = \frac{2}{3}$$

(b) Vemos que la ecuación $2x^2 + y^2 = 4$ implica que $x^2 \leq 2$, $y^2 \leq 4$. Por lo tanto, el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 4\}$ está acotado. Además es cerrado porque la función $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ es continua. Deducimos que el conjunto A (que, por otra parte, es una elipse) es compacto. Como la función $f(x, y) = (x+y)^2$ es continua en A , alcanza un máximo y un mínimo en A . Calculando los valores de f en los puntos soluciones de las ecuaciones de Lagrange, vemos que en los puntos

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

se alcanza el valor mínimo. Y en los puntos

$$\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \quad \text{y} \quad \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, -2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

se alcanza el valor máximo.

(4) Se considera la función $f(x, y, z) = 2ax^2 + 4y^2 + z^2 + 8xy + 2yz$, donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) Determine qué valores debe tomar a para que la función f sea convexa en $\mathbb{R}^3$.

(b) Para $a > 3$, halle los puntos críticos de f y clasifíquelos en extremos locales y/o globales.

Solución: El gradiente de la función f es $\nabla f(x, y, z) = (4ax + 8y, 8y + 8x + 2z, 2z + 2y)$ y la matriz Hessiana de f es

$$Hf(x, y, z) = \begin{pmatrix} 4a & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Los menores principales son $D_1 = 4a$, $D_2 = 32(a - 2)$, $D_3 = 16(3a - 8)$. Vemos que $D_3 > 0$ si y sólo si $a > 8/3$. Para los valores de a que satisfacen esta desigualdad, también se verifica que $D_1 > 0$ y $D_2 > 0$. Por lo tanto, si $a > 8/3$, la matriz $Hf(x, y, z)$ es definida positiva para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ y f es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^3$.

Por otra parte, $D_1 \leq 0$ si y sólo si $a \leq 0$ y $D_2 \geq 0$ si y sólo si $a \geq 2$. Por lo tanto, $Hf(x, y, z)$ no es definida negativa para ningún valor de a . La función no puede ser cóncava.

Para $a = 8/3$, la matriz $Hf(x, y, z)$ es semidefinida positiva para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Por lo tanto, la función es convexa en $\mathbb{R}^3$ cuando $a = 8/3$. Por otra parte, $f(3t, -4t, 4t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Es decir, f se anula a lo largo de la recta $\{(3t, -4t, 4t) : t \in \mathbb{R}\}$. Por lo tanto, para $a = 8/3$, la función f es convexa, pero no estrictamente convexa.

(b) Para $a > 3$, la función es estrictamente convexa. Los puntos críticos son la solución del sistema lineal

$$\nabla f(x, y, z) = 4ax + 8y = 0, \quad 8y + 8x + 2z = 0, \quad 2z + 2y = 0$$

cuyo determinante es $D_3 \neq 0$. Por lo tanto, hay una única solución $x = y = z = 0$. El único punto crítico es $(0, 0, 0)$. Como la función es convexa, se trata de un mínimo global de f en $\mathbb{R}^3$.

(5) Considere el problema de optimización siguiente

$$\left. \begin{array}{ll} \max & x^2 + 4y \\ \text{s.a.} & 2x + 2y \leq 1 \\ & x, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- (a) Halle las ecuaciones de Kuhn-Tucker asociadas al problema de optimización anterior.
(b) Determine los puntos que verifican las ecuaciones de Kuhn-Tucker del apartado anterior.
-

Solución:

(a) El lagrangiano asociado al problema de maximización es

$$L = x^2 + 4y + \lambda(1 - 2x - 2y) + \mu x + \delta y$$

de donde obtenemos las ecuaciones de Kuhn-Tucker,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} : & \quad 2x - 2\lambda + \mu = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} : & \quad 4 - 2\lambda + \delta = 0 \\ & \quad \lambda(1 - 2x - 2y) = 0 \\ & \quad \mu x = 0 \\ & \quad \delta y = 0 \\ & \quad 2x + 2y \leq 1 \\ & \quad x, y \geq 0 \\ & \quad \lambda, \mu, \delta \geq 0 \end{aligned}$$

(b) La ecuación $2\lambda = 4 + \delta$, junto con $\delta \geq 0$, implica que $\lambda \geq 2$. Por lo tanto,

$$2x + 2y = 1$$

Si $\mu = 0$, la ecuación $2x - 2\lambda + \mu = 0$ implica que $x = \lambda \geq 2$. Pero, entonces $2y = 1 - 2x \leq -3$.

Por lo tanto, $\mu \neq 0$ y $x = 0$. A partir de ahí, obtenemos que $y = 1/2$, $\delta = 0$, $\lambda = 2$, $\mu = 4$. La solución es

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{2}, \quad \lambda = 2, \quad \mu = 4, \quad \delta = 0$$

El valor máximo es

$$x^2 + 4y|_{x=0, y=1/2} = 2$$