Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2010.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 1 punto.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

(1) *Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales*

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x+2y+2az & = & -13 \\ x+2y+az & = & -5 \\ 5x+2ay-3z & = & -18 \end{array}\right.$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante.

(a) *Clasifique el sistema según los valores de a.*

(b) *Resuelva el sistema anterior para los valores de a para los cuales el sistema es compatible indeterminado. ¿Cuántos parámetros son necesarios para describir la solución en cada caso?*

Solución:

(a) La matriz ampliada del sistema es

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2a & -13 \\ 1 & 2 & a & -5 \\ 5 & 2a & -3 & -18 \end{array}\right)$$

Haciendo operaciones elementales por filas obtenemos

$$(f_1 \rightleftharpoons f_2) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -5 \\ 3 & 2 & 2a & -13 \\ 5 & 2a & -3 & -18 \end{array}\right) \quad (f_2 \mapsto 3f_1 - f2) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -5 \\ 0 & 4 & a & -2 \\ 5 & 2a & -3 & -18 \end{array}\right) \quad (f_3 \mapsto 5f_1 - f3) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -5 \\ 0 & 4 & a & -2 \\ 0 & 10-2a & 5a+3 & -7 \end{array}\right)$$

$$(f_3 \mapsto (10-2a)f_2/4 - f3) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -5 \\ 0 & 4 & a & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{a^2}{2} - \frac{5a}{2} - 3 & a+2 \end{array}\right) \quad (f_3 \mapsto 2f3) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a & -5 \\ 0 & 4 & a & -2 \\ 0 & 0 & -a^2-5a-6 & 2a+4 \end{array}\right)$$

(También se puede hacer calculando directamente $|A| = -2(a^2+5a+6)$.)

El rango de A es 3 si $-a^2-5a-6 \neq 0$ y 2 si $-a^2-5a-6=0$. Por lo tanto el rango de A es 2 si y sólo si $a=-2$ ó $a=-3$.

- Si $a=-2$, entonces $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.
- Si $a=-3$, entonces $\text{rango}(A) = 2 < \text{rango}(A|B) = 3$ y el sistema es incompatible.
- Si $a \neq -2$ y $a \neq -3$, entonces $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|B) = 3$ y el sistema es compatible determinado.

(b) El sistema es compatible indeterminado si $a=-2$. En este caso, el sistema original es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Eligiendo y como parámetro el conjunto se soluciones es

$$\{(2y-3, y, 2y+1) : z \in \mathbb{R}\}$$

(2) *Considere una función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

(a) *Escriba la definición que expresa que la función* f *es continua en un punto* $p = (x_0, y_0)$.

(b) *Considere la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2 y}{x^4+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Determine si esta función es continua en el punto $(0,0)$.

Solución:

(a) La función f es continua en el punto $p = (x_0, y_0)$ si

$$\lim_{(x,y)\to p} f(x,y) = f(p)$$

Es decir, f es continua en el punto $p = (x_0, y_0)$ si dado $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$$

entonces $|f(x,y) - f(p)| < \varepsilon$

(b) Tomando una curva de la forma $y = x^2$ vemos que

$$\lim_{x\to 0} f(x, y^2) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{x^4 + x^4} = 1 \neq f(0,0)$$

por lo que f no es continua en $(0,0)$.

(3) *Considere la función*

$$f(x,y) = 2xe^{y/x},$$

el punto $p = (2,0)$ *y el vector* $v = (3,2)$.

(a) *Calcule el gradiente de la función* f *en el punto* p. *Calcule el plano tangente a la gráfica de* f *en el punto* $(2,0,4)$.

(b) *Halle la derivada direccional de la funcion* f *en el punto* p *en la dirección del vector* v. *¿Cuál es la dirección de mayor crecimiento de* f *en el punto* p*? ¿Cuál es el máximo de la derivada direccional?*

Solución:

(a) La función es diferenciable en los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $x \neq 0$. El gradiente de f en un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $x \neq 0$ es

$$\nabla f(x,y) = \left(2e^{y/x} - \frac{2y}{x}e^{y/x}, 2e^{y/x}\right) = e^{y/x}\left(2 - \frac{2y}{x}, 2\right)$$

que evaluado en el punto $p = (2,0)$ es $\nabla f(2,0) = (2,2)$. Ahora observamos que $f(2,0) = 4$, por lo que el punto $(2,0,4)$ está en la gráfica de f. El plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,0,4)$ está determinado por la ecuación

$$\nabla f(2,0) \cdot (x-2, y) = z - 4$$

es decir, $z = 2x + 2y$.

(b) La derivada de la funcion f en el punto p según el vector v es

$$D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v = (2,2) \cdot (3,2) = 10$$

Como $\|v\| = \sqrt{13}$ la derivada direccional de la funcion f en el punto p en la dirección del vector v es

$$\frac{1}{\|v\|} D_v f(p) = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

La dirección de mayor crecimiento de f en el punto p se produce en la dirección determinada por $\nabla f(p)$ es

$$\frac{1}{\|\nabla f(p)\|}\nabla f(p) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2,2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$$

y el valor máximo de la derivada direccional en el punto p es

$$\|\nabla f(p)\| = \|(2,2)\| = 2\sqrt{2}$$

(4) *Considere la función*

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2xy - \frac{z^2}{2} + 6$$

y el conjunto

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2x + 2y - 1\}$$

(a) *Halle las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.*
(b) *Determine los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange.*

Solución:

(a) El Lagrangiano asociado al problema es

$$L(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2xy - \frac{z^2}{2} + 6 + \lambda(z - 2x - 2y + 1)$$

Las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 2x + 2y - 2\lambda &= 0 \\ -2y + 2x - 2\lambda &= 0 \\ -z + \lambda &= 0 \\ 2x + 2y - 1 &= z \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x + y &= \lambda \\ x - y &= \lambda \\ z &= \lambda \\ 2x + 2y - 1 &= z \end{aligned}$$

(b) De las dos primeras ecuaciones obtenemos $x + y = x - y$ que implica que $y = 0$. Por lo tanto, las ecuaciones se reducen a

$$\begin{aligned} x &= \lambda \\ z &= \lambda \\ 2x - 1 &= z \end{aligned}$$

Obtenemos que $\lambda = z = 2\lambda - 1$ por lo que $\lambda = x = 1$. La solución es $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

(5) *Considere el problema de maximización siguiente*

$$\max_{x,y} \quad y(x-1)$$
$$\textbf{\textit{s.a.}} \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 2$$

(a) *Halle las ecuaciones de Kuhn-Tucker que determinan los extremos de f en A.*
(b) *Determine los puntos que satisfacen las ecuaciones de Kuhn-Tucker.*

Solución:

(a) La función $f(x,y) = y(x-1)$ es continua y el conjunto $\{(x-1)^2 + y^2 \leq 2\}$ es compacto. Por el Teorema de Weierstrass existe un máximo y un mínimo global. Las funciones $y(x-1)$ y $(x-1)^2 + y^2 - 2$ son de clase C^∞ y se verifica la condición de regularidad. El Lagrangiano del problema es

$$L = y(x-1) + \lambda(2 - (x-1)^2 - y^2)$$

y las ecuaciones de Kuhn-Tucker son

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= y - 2\lambda(x-1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x - 1 - 2\lambda y = 0 \\ \lambda(2 - (x-1)^2 - y^2) &= 0 \\ (x-1)^2 + y^2 &\leq 2 \\ \lambda &\geq 0 \end{aligned}$$

(b) Con $\lambda = 0$ obtenemos la solución $x = 1$, $y = 0$. Buscamos ahora las soluciones con $\lambda \neq 0$. Suponiendo esto, las ecuaciones de Kuhn-Tucker son

$$y = 2\lambda(x-1) \tag{1}$$
$$x - 1 = 2\lambda y \tag{2}$$
$$(x-1)^2 + y^2 = 2 \tag{3}$$
$$\lambda > 0 \tag{4}$$

Sustituyendo $x - 1 = 2\lambda y$ en la ecuación (1), obtenemos que $4\lambda^2 y = y$. Una posible solución es $y = 0$ y de nuevo obtenemos $x = 1$. Pero esto no es compatible con $(x-1)^2 + y^2 = 2$. Concluimos que $y \neq 0$ y, por lo tanto

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}$$

Como $\lambda > 0$ obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{2}$$

Las ecuaciones de Kuhn-Tucker se reducen a

$$\begin{aligned} y &= x - 1 \\ (x-1)^2 + y^2 &= 2 \\ \lambda &= 1/2 \end{aligned}$$

Sustityendo $y = x - 1$ en la segunda ecuación, obtenemos que $2y^2 = 2$ es decir, $y = \pm 1$. Por tanto, también obtenemos las soluciones

$$x = 2, y = 1, \lambda = \frac{1}{2}, \qquad x = 0, y = -1, \lambda = \frac{1}{2}$$

Como $f(1,0) = 0$, $f(2,1) = 1 = f(0,-1)$ el valor máximo se alcanza en los puntos $(2,1)$ y $(0,-1)$.