(1) Sea el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x^2, \quad x \geq 0\}$.

(a) Dibuje el conjunto A, su frontera y su interior, y discuta si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando las respuestas.

(b) Considere la función $f(x, y) = x + y^2$. Determine si esta función alcanza un máximo en A. ¿Y un mínimo? En caso afirmativo, determine el/los punto(s) extremos de f en A.

---

(2) Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} z^3 + 3x - y - t^2 & = & 3 \\ \ln y + x - z^2 & = & 0 \end{array} \right.$$

(a) Pruebe que este sistema de ecuaciones determina a y, z como funciones diferenciables de x y t en un entorno del punto $(x, y, z, t) = (1, 1, 1, 0)$.

(b) Sea $y(x, t)$ la función cuya existencia se ha determinado en el apartado anterior. Escriba la ecuación del plano tangente a la gráfica de y en el punto $(x, t; y(x, t)) = (1, 0; 1)$.

---

(3) Suponga que una empresa monopolista produce tres tipos de productos, cuyas demandas inversas vienen dadas por

$$p_1 = 45 - 4q_1$$
$$p_2 = 29 - 3q_2$$
$$p_3 = 21 - 2q_3$$

donde q_1, q_2 y q_3 son las cantidades demandadas y p_1, p_2 y p_3 son los precios respectivos. La función de costes es $C(Q) = 20 + 5Q + Q^2$ con $Q = q_1 + q_2 + q_3$.

(a) Escriba la función de beneficios netos $B(q_1, q_2, q_3)$ (es decir, ingresos menos costes) en función de las cantidades demandadas. Determine si la la función de beneficios $B(q_1, q_2, q_e)$ es cóncava o convexa.

(b) Determine los niveles de demanda q_1, q_2 y q_3 que maximizan el beneficio. Justifique que las cantidades obtenidas son un máximo global de la función $B(q_1, q_2, q_e)$.

---

(4) Considere la función $f(x, y, z) = 3ax^2 + axz + aby^2 + 3az^2$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los que la función f es convexa.

(b) Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los que la función f es cóncava.

---

(5) Considere el problema de optimizar la función $f(x, y) = x^2 - 6x + y^2 + 9$ en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(a) Justifique que la función f alcanza extremos globales en el conjunto A. Halle las ecuaciones de Kuhn-Tucker que determinan los extremos de f en A.

(b) Determine los puntos que satisfacen las ecuaciones de Kuhn-Tucker. Determine en qué punto(s) la función f alcanza el valor máximo en A y en cuál(es) alcanza el valor mínimo.
