Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. 30 Junio de 2010.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 1 punto.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

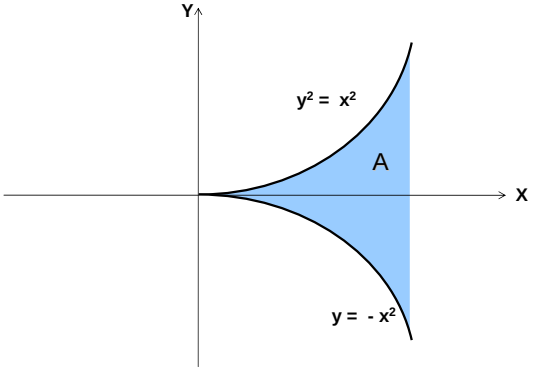
(1) *Sea el conjunto* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x^2, \quad x \geq 0\}$.

(a) *Dibuje el conjunto* A*, su frontera y su interior, y discuta si* A *es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando las respuestas.*

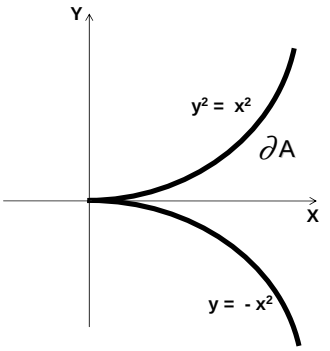
(b) *Considere la función* $f(x, y) = x + y^2$*. Determine si esta función alcanza un máximo en* A*. ¿Y un mínimo? En caso afirmativo, determine el/los punto(s) extremos de* f *en* A*.*

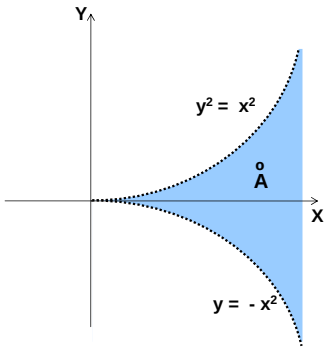
Solución:

(a) La desigualdad $|y| \leq x^2$ es equivalente a $-x^2 \leq y \leq x^2$. El conjunto A puede escribirse como $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 \leq y \leq x^2, \quad x \geq 0\}$. La representación gráfica es



La frontera y el interior están representados en las siguientes figuras





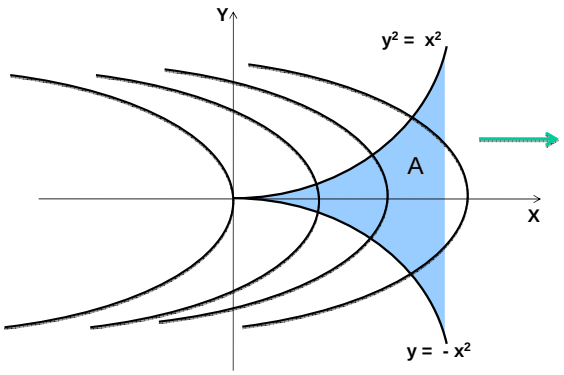
Como $\partial(A) \subset A$, el conjunto A es cerrado. No es abierto ya que el interior de A no coincide con A. El conjunto no es acotado ya que contiene todos los puntos de la forma $(n, 0)$ para $n = 1, 2, \ldots$. El conjunto no es convexo porque los puntos $p = (0, 0)$ y $q = (1, 1)$ pertenecen a A pero la combinación convexa

$$(x, y) = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin A$$

ya que

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2} = |y|$$

(b) Las curvas de nivel de la función f son curvas de la form $x = C - y^2$ con $C \in \mathbb{R}$. La representación gráfica para diferentes valores de C es la siguiente (las flecha indica la dirección en la que el valor de f crece al aumentar el valor de C)



Gráficamente, vemos que el valor mínimo de f se alcanza en el punto $(0, 0) \in$ y que f no alcanza un valor máximo en A.

(2) *Considere el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\left\{\begin{array}{rcl} z^3+3x-y-t^2 & = & 3 \\ \ln y+x-z^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

(a) *Pruebe que este sistema de ecuaciones determina a y, z como funciones diferenciables de x y t en un entorno del punto $(x,y,z,t)=(1,1,1,0)$.*

(b) *Sea $y(x,t)$ la función cuya existencia se ha determinado en el apartado anterior. Escriba la ecuación del plano tangente a la gráfica de y en el punto $(x,t;y(x,t))=(1,0;1)$.*

Solución:

(a) Consideremos las funciones

$$f_1(x,y,z,t)=z^3+3x-y-t^2-3$$
$$f_2(x,y,z,t)=\ln y+x-z^2$$

Estas funciones son de clase C^1. Además se comprueba fácilmente que el punto $((1,1,1,0)$ es una solución del sistema

$$f_1(1,1,1,0)=f_2(1,1,1,0)=0$$

Ahora comprobamos que

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(y,z)}(1,1,1,0)=\det\left(\begin{array}{cc} -1 & 3z^2 \\ \frac{1}{y} & -2z \end{array}\right)\Big|_{x=1,y=1,z=1,t=0}=\det\left(\begin{array}{cc} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{array}\right)=-1\neq 0$$

por lo que se verifican las hipótesis del Teorema de la Función implícita y podemos despejar las variables y, z como funciones diferenciables de x y t en un entorno del punto $(x,y,z,t)=(1,1,1,0)$.

(b) Derivamos el sistema respecto a x

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+3-\frac{\partial y}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}+1-2z\frac{\partial z}{\partial x} & = & 0 \end{array}\right.$$

Ahora sustituimos $x=1$, $y=1$, $z=1$, $t=0$, con lo que obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\frac{\partial z}{\partial x}(1,0)+3-\frac{\partial y}{\partial x}(1,0) & = & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x}(1,0)+1-2\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$\frac{\partial y}{\partial x}(1,0)=-9,\quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,0)=-4$$

Derivamos el sistema respecto a t

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3z^2\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial t}-2t & = & 0 \\ \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial t}-2z\frac{\partial z}{\partial t} & = & 0 \end{array}\right.$$

Ahora sustituimos $x=1$, $y=1$, $z=1$, $t=0$, con lo que obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3\frac{\partial z}{\partial t}-\frac{\partial y}{\partial t} & = & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial t}-2\frac{\partial z}{\partial t} & = & 0 \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema, obtenemos

$$\frac{\partial y}{\partial t}(1,0)=0,\quad \frac{\partial z}{\partial t}(1,0)=0$$

La ecuación del plano tangente a la gráfica de y en el punto $(x,t;y(x,t))=(1,0;1)$ es

$$y=y(1,0)+\frac{\partial y}{\partial x}(1,0)(x-1)+\frac{\partial y}{\partial t}(1,0)(t-0)=1-9(x-1)$$

(3) *Suponga que una empresa monopolista produce tres tipos de productos, cuyas demandas inversas vienen dadas por*

$$p_1 = 45 - 4q_1$$
$$p_2 = 29 - 3q_2$$
$$p_3 = 21 - 2q_3$$

donde q_1, q_2 y q_3 son las cantidades demandadas y p_1, p_2 y p_3 son los precios respectivos. La función de costes es $C(Q) = 20 + 5Q + Q^2$ con $Q = q_1 + q_2 + q_3$.

(a) *Escriba la función de beneficios netos $B(q_1, q_2, q_3)$ (es decir, ingresos menos costes) en función de las cantidades demandadas. Determine si la la función de beneficios $B(q_1, q_2, q_e)$ es cóncava o convexa.*

(b) *Determine los niveles de demanda q_1, q_2 y q_3 que maximizan el beneficio. Justifique que las cantidades obtenidas son un máximo global de la función $B(q_1, q_2, q_e)$.*

Solución:

(a) La función de beneficios viene dada por

$$\begin{aligned} B(q_1, q_2, q_e) &= q_1(45 - 4q_1) + q_2(29 - 3q_2) + q_3(21 - 2q_3) - \big(20 + 5(q_1 + q_2 + q_3) + (q_1 + q_2 + q_3)^2\big) \\ &= 40q_1 + 24q_2 + 16q_3 - 5q_1^2 - 4q_2^2 - 3q_3^2 - 2q_1q_2 - 2q_1q_3 - 2q_2q_3 - 20 \end{aligned}$$

Para determinar si la la función de beneficios $B(q_1, q_2, q_e)$ es cóncava o convexa, calculamos su matriz Hessiana

$$\mathrm{H}\, B(q_1, q_2, q_e) = \begin{pmatrix} -10 & -2 & -2 \\ -2 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$d_1 = -10 < 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} -10 & -2 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = 76 > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} -10 & -2 & -2 \\ -2 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -400 < 0$$

Vemos que la matriz Hessiana es definida negativa. Por lo tanto la función de beneficios es estrictamente cóncava en todo $\mathbb{R}^3$.

(b) Para obtener el/los extremos se identifican los puntos críticos, es decir, los puntos para los cuales $\nabla B(q_1, q_2, q_e) = (0, 0, 0)$. Dado que la función de beneficios es derivable en todo su dominio, no hay más puntos críticos que los que hacen cero el gradiente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial q_1} &= -10q_1 - 2q_2 - 2q_3 + 40 = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial q_2} &= -8q_2 - 2q_1 - 2q_3 + 24 = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial q_3} &= -6q_3 - 2q_1 - 2q_2 + 16 = 0 \end{aligned}$$

La solución de este sistema es

$$q_1 = \frac{86}{25} \approx 3.44, \quad q_2 = \frac{48}{25} \approx 1.92, \quad q_3 = \frac{22}{25} \approx 0.88$$

Como la función de beneficios es cóncava en todo $\mathbb{R}^3$, el punto crítico corresponde a un máximo global de B.

(4) *Considere la función* $f(x,y,z) = 3ax^2 + axz + aby^2 + 3az^2$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$.
   (a) *Determine los valores de* $a, b \in \mathbb{R}$ *para los que la función* f *es convexa.*
   (b) *Determine los valores de* $a, b \in \mathbb{R}$ *para los que la función* f *es cóncava.*

Solución: El gradiente de la función f es

$$\nabla f(x,y,z) = (6ax + az, 2aby, ax + 6az)$$

y la matriz Hessiana es

$$\mathrm{H}\, f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6a & 0 & a \\ 0 & 2ab & 0 \\ a & 0 & 6a \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$D_1 = 6a, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 6a & 0 \\ 0 & 2ab \end{vmatrix} = 12a^2b, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 6a & 0 & a \\ 0 & 2ab & 0 \\ a & 0 & 6a \end{vmatrix} = 70a^3b$$

(a) Si $\mathrm{H}\, f(x,y,z)$ es definida positiva en todo $\mathbb{R}^3$, entonces la función f es convexa. Esto puede garantizarse si $D_1, D_2, D_3 > 0$. En vista de los cálculos anteriores esto es equivalente a

$$6a > 0, \quad 12a^2b > 0, \quad 70a^3b > 0$$

por lo tanto, es suficiente que $a > 0$, $b > 0$.

(b) Si $\mathrm{H}\, f(x,y,z)$ es definida negativa en todo $\mathbb{R}^3$, entonces la función f es cóncava. Esto puede garantizarse si $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$. En vista de los cálculos anteriores esto es equivalente a

$$6a < 0, \quad 12a^2b > 0, \quad 70a^3b < 0$$

La primera desigualdad implica que $a < 0$ y la segunda implica que $b > 0$. Y suponiendo que $a < 0$ y que $b > 0$, la tercera desigualdad se verifica. Por lo tanto, es suficiente que $a < 0$ y $b > 0$.

(5) *Considere el problema de optimizar la función* $f(x,y) = x^2 - 6x + y^2 + 9$ *en el conjunto* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

(a) *Justifique que la función* f *alcanza extremos globales en el conjunto* A. *Halle las ecuaciones de Kuhn-Tucker que determinan los extremos de* f *en* A.

(b) *Determine los puntos que satisfacen las ecuaciones de Kuhn-Tucker. Determine en qué punto(s) la función* f *alcanza el valor máximo en* A *y en cuál(es) alcanza el valor mínimo.*

Solución:

(a) Como la región factible es un conjunto compacto, y f es continua, por el Teorema de Weierstrass, f alcanza extremos globales en esa región. Si queremos calcular los máximos de f, el Lagrangiano es

$$L = x^2 + y^2 - 6x + 9 + \lambda(4 - x^2 - y^2)$$

Las ecuaciones de Kuhn-Tucker correspondientes a este problema son:

$$\begin{aligned} 2x - 6 - 2\lambda x &= 0 \\ 2y - 2\lambda y &= 0 \\ \lambda(4 - x^2 - y^2) &= 0 \\ \lambda &\geq 0 \\ x^2 + y^2 &\leq 4 \end{aligned}$$

Para calcular los mínimos de f, el Lagrangiano es

$$L = -x^2 - y^2 + 6x - 9 + \lambda(4 - x^2 - y^2)$$

Las ecuaciones de Kuhn-Tucker correspondientes a este problema son:

$$\begin{aligned} -2x + 6 - 2\lambda x &= 0 \\ -2y - 2\lambda y &= 0 \\ \lambda(4 - x^2 - y^2) &= 0 \\ \lambda &\geq 0 \\ x^2 + y^2 &\leq 4 \end{aligned}$$

(b) Primero, calculamos los máximos de f en A. Podemos escribir las ecuaciones de Kuhn-Tucker correspondientes al problema de maximización como

$$x(1 - \lambda) = 3 \tag{1}$$
$$y(1 - \lambda) = 0 \tag{2}$$
$$\lambda(4 - x^2 - y^2) = 0 \tag{3}$$
$$\lambda \geq 0 \tag{4}$$
$$x^2 + y^2 \leq 4 \tag{5}$$

De la ecuación (1) deducimos que $x \neq 0$ y $\lambda \neq 1$. Luego, de ecuación (2) deducimos que $y = 0$. Si $\lambda = 0$, entonces de la ecuación (1) obtenemos que $x = 3$. Pero entonces la ecuación (5) no es posible. Concluimos que $\lambda \neq 0$ y, por lo tanto $x^2 = x^2 + y^2 = 4$. Obtenemos que $x = \pm 2$. Pero si $x = 2$, de la ecuación (1) obtenemos que $\lambda = -1/2$ que contradice la ecuación (4). Concluimos que el valor máximo se alcanza en $x = -2$, $y = 0$. El valor correspondiente de λ es $\lambda = 5/2$.
Ahora calculamos los mínimos de f en A. Podemos escribir las ecuaciones de Kuhn-Tucker correspondientes al problema de minimización de la siguiente manera,

$$x(1 + \lambda) = 3 \tag{6}$$
$$y(1 + \lambda) = 0 \tag{7}$$
$$\lambda(4 - x^2 - y^2) = 0 \tag{8}$$
$$\lambda \geq 0 \tag{9}$$
$$x^2 + y^2 \leq 4 \tag{10}$$

Igual que antes, de la ecuación (6) deducimos que $x \neq 0$ y $\lambda \neq 1$. Luego, de ecuación (7) deducimos que $y = 0$. Si $\lambda = 0$, entonces de la ecuación (6) obtenemos que $x = -3$. Pero entonces la ecuación (10) no es posible. Concluimos que $\lambda \neq 0$ y, por lo tanto $x^2 = x^2 + y^2 = 4$. Obtenemos que $x = \pm 2$. Pero si $x = -2$, de la ecuación (6) obtenemos que $\lambda = -5/2$ que contradice la ecuación (9). Concluimos que el valor mínimo se alcanza en $x = 2$, $y = 0$. El valor correspondiente de λ es $\lambda = 1/2$.