Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2009.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 1h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 1 punto.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

(1) Sea el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, \quad y \geq x^2\}$.

(a) Dibuje el conjunto A, su frontera y su interior, y discuta si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando las respuestas.

(b) Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+(y-1)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 1), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 1). \end{cases}$$

Determine si esta función alcanza un máximo en A. ¿Y un mínimo?

---

(2) Considere el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - x^2 & = & -4 \\ e^{y-1} + x - z^2 & = & 0 \end{cases}$$

(a) Pruebe que este sistema de ecuaciones determina a y, z como funciones diferenciables de x en un entorno del punto $(3, 1, 2)$.

(b) Sean $y(x)$, $z(x)$ las funciones halladas en el apartado anterior. Calcule las derivadas $y'(3)$ y $z'(3)$.

---

(3) Considere la función

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - x^3$$

(a) Determine el mayor conjunto abierto y convexo S de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es cóncava.

(b) Estudie si f alcanza extremos globales en el conjunto S del apartado anterior.

---

(4) Considere la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$$

y el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$$

(a) Halle las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.

(b) Determine los extremos globales de f en A, especificando si son máximos o mínimos.

---

(5) Considere el problema de maximización siguiente

$$\max_{x,y} \quad x^2 + y^2 + y - 1$$

$$\textbf{s.a.} \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

(a) Halle las ecuaciones de Kuhn-Tucker que determinan los extremos de f en A.

(b) Determine los puntos que satisfacen las ecuaciones de Kuhn-Tucker.
