Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Mayo de 2009.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 1h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 1 punto.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

ESPACIO PARA HACER OPERACIONES

(1) *Sea el conjunto* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, \quad y \geq x^2\}$.

(a) *Dibuje el conjunto* A*, su frontera y su interior, y discuta si* A *es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando las respuestas.*

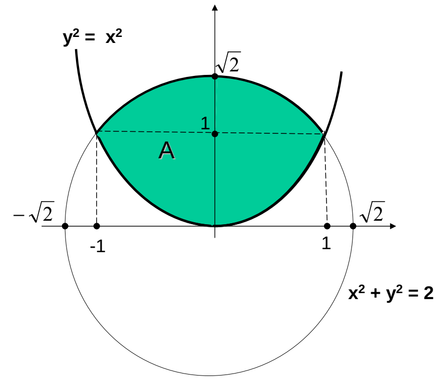
(b) *Considere la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+(y-1)^2} & \textit{si } (x,y) \neq (0,1), \\ 0 & \textit{si } (x,y) = (0,1). \end{cases}$$

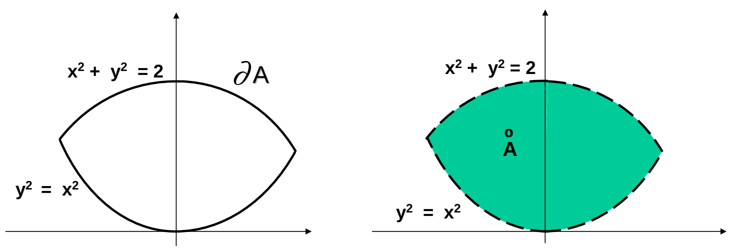
Determine si esta función alcanza un máximo en A*. ¿Y un mínimo?*

Solución:

(a) El conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\}$ es un disco de radio $\sqrt{2}$ y centro $(0,0)$. El conjunto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$ es una parábola. Además $A = B \cap C$. Gráficamente,



La frontera y el interior están representados en la figura siguiente



Como $\partial(A) \subset A$, el conjunto A es cerrado. El conjunto es acotado, ya que esta contenido en $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2,\}$ el disco de radio $\sqrt{2}$ y centro $(0,0)$. Los conjuntos B y C son convexos. Por lo tanto, $A = B \cap C$ también es convexo.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \infty$ y $(0,1) \in A$. Por lo tanto, $f(x,y)$ no puede alcanzar un máximo absoluto en A. Por otra parte, observamos que $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in A$ y que $f(0,1) = 0$. Por lo tanto, el punto $(0,1)$ es un mínimo global de f en A.

(2) *Considere el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - x^2 &= -4 \\ e^{y-1} + x - z^2 &= 0 \end{cases}$$

(a) *Pruebe que este sistema de ecuaciones determina a y, z como funciones diferenciables de x en un entorno del punto $(3, 1, 2)$.*

(b) *Sean $y(x)$, $z(x)$ las funciones halladas en el apartado anterior. Calcule las derivadas $y'(3)$ y $z'(3)$.*

Solución:

(a) Consideremos las funciones

$$f_1 = y^2 + z^2 - x^2 + 4$$
$$f_2 = e^{y-1} + x - z^2$$

Estas funciones son de clase C^1. Además se comprueba fácilmente que el punto $(3, 1, 2)$ es una solución del sistema

$$f_1(3, 1, 2) = f_2(3, 1, 2) = 0$$

Ahora comprobamos que

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, z)}(3, 1, 2) = \det \begin{pmatrix} 2y & 2z \\ e^{y-1} & -2z \end{pmatrix}\Bigg|_{x=3, y=1, z=2} = \det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = -12 \neq 0$$

Por lo que se verifican las hipótesis del Teorema de la Función implícita.

(b) Derivamos el sistema respecto a x

$$\begin{cases} 2yy' + 2zz' - 2x &= 0 \\ y'e^{y-1} + 1 - 2zz' &= 0 \end{cases}$$

Ahora sustituimos $x = 3$, $y = 1$, $z = 2$ con lo que obtenemos

$$\begin{cases} 2y'(3) + 4z'(3) - 6 &= 0 \\ y'(3) + 1 - 4z'(3) &= 0 \end{cases}$$

de donde obtenemos

$$y'(3) = \frac{5}{3}, \quad z'(3) = \frac{2}{3}$$

(3) *Considere la función*

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - 2xy - x^3$$

(a) *Determine el mayor conjunto abierto y convexo S de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es cóncava.*

(b) *Estudie si f alcanza extremos globales en el conjunto S del apartado anterior.*

Solución:

(a) El gradiente de f es

$$\nabla f = (2x - 2y - 3x^2, -2y - 2x)$$

La matriz Hessiana de f es

$$Hf = \begin{pmatrix} 2-6x & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

f es cóncava para los valores de x e y que hacen el hessiano definido negativo o semidefinido negativo. Para determinar esto último calculamos sus menores,

$$D_1 = 2 - 6x, \quad D_2 = 12x - 8$$

Luego f es cóncava si y sólo si $D_1 < 0$ y $D_2 > 0$, es decir, si y sólo si $x > 1/3$ y $x > 8/12 = 2/3$. Como $2/3 > 1/3$, es suficiente la segunda solución. Así, f es cóncava en el conjutno

$$S = \{(x,y) : x > 2/3\}$$

(b) La función f es diferenciable. Los puntos críticos de f son las soluciones de $\nabla f = (0,0)$, o equivalentemente

$$\begin{aligned} 2x - 2y - 3x^2 &= 0 \\ -x - y &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$(x,y) = (0,0), \quad (x,y) = (4/3, -4/3)$$

El punto $(0,0)$ no está en S. El punto $(4/3, -4/3)$ sí está en S. Este conjunto es convexo y f es cóncava en S. Por lo tanto, $(4/3, -4/3)$ es un máximo global de f en S. No hay mínimo, ni local ni global, en S.

(4) *Considere la función*

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$$

y el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2\}$$

(a) *Halle las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.*
(b) *Determine los extremos globales de f en A, especificando si son máximos o mínimos.*

Solución:

(a) El Lagrangiano es

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - 2xy - \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

por lo que las ecuaciones de Lagrange son

$$\begin{aligned} 2x - 2y - 2x\lambda &= 0 \\ 2y - 2x - 2y\lambda &= 0 \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{aligned}$$

(b) En primer lugar simplificamos las ecuaciones a

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x &= y \\ (1-\lambda)y &= x \\ x^2 + y^2 &= 2 \end{aligned}$$

De las dos primeras ecuaciones vemos que

$$(1-\lambda)^2 y = y$$

Pero $y = 0$ no puede ser solución porque si sustuimos $y = 0$ en la segunda ecuación se obtiene que $x = 0$ y estos valores no verifican la tercera ecuación. Concluimos que $(1-\lambda)^2 = 1$ por lo que los valores posibles de λ son 0 y 2. Si $\lambda = 0$, obtenemos las soluciones $(1,1), (-1,-1)$. Si $\lambda = 2$, obtenemos las soluciones $(1,-1), (-1,1)$.
La matriz Hessiana de L es

$$\mathrm{H}\, L(x,y;\lambda) \begin{pmatrix} 2-2\lambda & -2 \\ -2 & 2-2\lambda \end{pmatrix}$$

Vemos que

$$\mathrm{H}\, L((x,y;0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathrm{H}\, L((x,y;2) = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

En ningún caso es definida por lo que las condiciones de segundo orden no son informativas. En los puntos $(1,1)$ y $(-1,-1)$ tenemos que

$$\nabla(x^2 + y^2 - 2)|_{x=y=1} = (2x, 2y)|_{x=y=1} = (2,2), \quad \nabla(x^2 + y^2 - 2)|_{x=y=-1} = (2x, 2y)|_{x=y=-1} = -(2,2)$$

por lo que

$$T_{(1,1)}M = T_{(-1,-1)} = \{(v_1, v_2) = (2,2) \cdot (v_1, v_2) = 0\} = \{(t,-t) = t \in \mathbb{R}\}$$

Obtenemos la forma cuadrática

$$(t,-t) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix} = 8t^2$$

que es definida positiva, por lo que los puntos $(1,1), (-1,-1)$ son mínimos globales.
En los puntos $(-1,1)$ y $(1,-1)$ tenemos que

$$T_{(-1,1)}M = T_{(1,-1)} = \{(v_1, v_2) = (-2,2) \cdot (v_1, v_2) = 0\} = \{(t,t) = t \in \mathbb{R}\}$$

Obtenemos la forma cuadrática

$$(t,-t) \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ -t \end{pmatrix} = -8t^2$$

que es definida negativa, por lo que los puntos $(-1,1), (1,-1)$ son máximos globales.
Una manera alternativa de clasificar los puntos críticos es la siguiente. El conjunto A es compacto y la función f es continua. Por el Teorema de Weierstrass, f alcanzan un máximo y un mínimo globales en A. Estos puntos extremos deben de satisfacer las ecuaciones de Lagrange. Calculando el valor de f en estos puntos vemos que

$$f(1,1) = f(-1-,1) = 0, \quad f(-1,1) = f(1-,1) = 4$$

por lo que en los puntos $(1,1)$ y $(-1-,1)$ se alcanza un mínimo global y en los puntos $(-1,1)$ y $(1-,1)$ se alcanza un máximo global.

(5) *Considere el problema de maximización siguiente*

$$\max_{x,y} \quad x^2 + y^2 + y - 1$$
$$\textbf{\textit{s.a.}} \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

(a) *Halle las ecuaciones de Kuhn-Tucker que determinan los extremos de f en A.*
(b) *Determine los puntos que satisfacen las ecuaciones de Kuhn-Tucker.*

Solución:

(a) La función $x^2 + y^2 + y - 1$ es continua y el conjunto $\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ es compacto. Por el Teorema de Weierstrass existe un máximo y un mínimo global. Las funciones $x^2 + y^2 + y - 1$ y $x^2 + y^2 - 1$ son de clase C^∞ y se verifica la condición de regularidad. El Lagrangiano del problema es

$$L = x^2 + y^2 + y - 1 + \lambda(1 - x^2 - y^2)$$

y las ecuaciones de Kuhn-Tucker son

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - 2\lambda x = 0 \tag{1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2y + 1 - 2\lambda y = 0 \tag{2}$$
$$\lambda(x^2 + y^2 - 1) = 0 \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 \leq 1 \tag{4}$$
$$\lambda \geq 0 \tag{5}$$

(b) Si $\lambda = 0$, entonces $x = 0$ (por la ecuación 1), $y = -1/2)$ (por la ecuación 2). Obtenemos la solución

$$x = 0, y = -1/2), \quad \lambda = 0$$

Si $\lambda \neq 0$, entonces $x^2 + y^2 - 1 = 0$. La ecuación 1 se puede escribir como $x(1 - \lambda)) = 0$. Si $x = 0$ entonces $y = \pm 1$. Si $y = 1$, de la la ecuación 2 vemos que $\lambda = 3/2$ y obtenemos la solución

$$x = 0, y = 1, \quad \lambda = \frac{3}{2}$$

Si $y = -1$, de la la ecuación 2 vemos que $\lambda = 1/2$ y obtenemos la solución

$$x = 0, y = -1, \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

Finalmente, si $\lambda = 1$, de la ecuación 2 obtenemos que $2y + 1 - 2y = 0$, lo cual es imposible. Concluimos que las soluciones de las ecuaciones de Kuhn-Tucker son los puntos

$$x = 0, y = -1/2), \quad \lambda = 0$$
$$x = 0, y = 1, \quad \lambda = \frac{3}{2}$$
$$x = 0, y = -1, \quad \lambda = \frac{1}{2}$$

Como

$$f(0, -1/2) = \frac{-5}{4}, \quad f(0,1) = 1, \quad f(0,-1) = -1$$

el mínimo global se alcanza en el punto $(0, -1/2)$ y el máximo global se alcanza en el punto $(0, 1)$.

ESPACIO PARA HACER OPERACIONES

ESPACIO PARA HACER OPERACIONES

ESPACIO PARA HACER OPERACIONES