

Universidad Carlos III de Madrid
Departamento de Economía
Examen final de Matemáticas II. Junio de 2009.

Apellidos:

Nombre:

DNI:

Titulación:

Grupo:

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale 1 punto.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

(1) Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + (k+1)y + 2z &= -1 \\ kx + y + z &= k \\ (k-1)x - 2y - z &= k+1 \end{cases}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.

- (a) Clasifique el sistema según los valores de k .
 - (b) Resuelva el sistema anterior para los valores de k para los cuales el sistema tenga infinitas soluciones. ¿Cuántos parámetros son necesarios para describir la solución?
-

(2) Considere la función $f(x, y) = 3x \ln(x^2 - y)$, el punto $p = (2, 3)$ y el vector $v = (1, 2)$.

- (a) Halle la derivada direccional de la función f en el punto p en la dirección del vector v .
 - (b) ¿Cuál es la dirección de mayor crecimiento de f en el punto p ? ¿Cuál es el máximo de la derivada direccional de f en el punto p ?
-

(3) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{5xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Estudie si la función f es continua en el punto $(0, 0)$. Estudie en qué puntos de \mathbb{R}^2 es continua la función f .
- (b) Razone en cuáles de los siguientes conjuntos se puede aplicar el Teorema de Weierstrass para asegurar que la función f del apartado anterior alcanza extremos globales

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 1\}$$

(4) Una empresa fabrica y vende dos bienes A y B. El ingreso total procedente de la venta de x_1 unidades de A y x_2 unidades de B es el siguiente:

$$I(x_1, x_2) = -x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1 + 8x_2 \quad (x_1 \text{ y } x_2 \text{ en miles de unidades})$$

- (a) Halle las cantidades x_1 y x_2 que maximizan el ingreso.
 - (b) Justifique que las cantidades obtenidas en el apartado anterior son un máximo global de la función $I(x_1, x_2)$
-

(5) Considere el problema de maximización siguiente

$$\begin{aligned} \max_{x,y} \quad & (x-1)^2 - y \\ \text{s.a.} \quad & -2x + y \leq 2 \\ & x + y \leq 5 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

- (a) Halle las ecuaciones de Kuhn-Tucker que determinan los extremos de f y dibuje el conjunto factible
 - (b) Indique cuántas restricciones hay activas en el punto $A = (1, 0)$. Compruebe si el punto $A = (1, 0)$ satisface las ecuaciones de Kuhn-Tucker para el problema dado.
-