- (1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y + (a - 1)z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ (a - 1)x + 2y + z = -3 \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es una constante.

- (a) Clasificar el sistema según los valores de a .
(b) Resolver el sistema anterior para los valores de a para los cuales el sistema es compatible indeterminado. ¿Cuántos parámetros son necesarios para describir la solución en cada caso?
-

- (2) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- (a) Hallar el polinomio característico y los valores propios (o autovalores) de la matriz A .
(b) Justificar razonadamente si la matriz A es diagonalizable y, si lo es, encontrar dos matrices D y P tales que $A = PDP^{-1}$.
(c) Utilizando el apartado anterior, indicar cómo se podría calcular A^{200} . (Es suficiente escribir la respuesta como el producto de tres matrices)
-

- (3) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y, z, t) = (x + z, 2x + y + 2z + 2t, y + 2t, 3x + 2y + 3z + 4t)$$

- (a) Escribir la matriz asociada a f (respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$). Calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen de f .
(b) Escribir un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que determinen el núcleo y un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que determinen la imagen de f . ¿Cuál es el número mínimo de ecuaciones necesarias en cada uno de los sistemas de ecuaciones anteriores?
(c) Hallar una base de la imagen de f y una base para el núcleo de f .
-

- (4) Sea el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq 2\}$.

- (a) Dibujar el conjunto A , su frontera y su interior, y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.
(b) Demuestra que la función $f(x, y) = y^2 + (x - 1)^2$ tiene un máximo y un mínimo en A .
(c) Utilizando las curvas de nivel de $f(x, y)$, hallar el máximo y el mínimo de f en A .
-

- (5) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2}{|x|+3|y|} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- (a) Estudiar si la función f es continua en el punto $(0, 0)$. Estudiar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es continua la función f .
(b) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0, 0)$, en caso de que existan.
-

- (6) Dada la forma cuadrática

$$Q(x, y, z) = x^2 + 2ay^2 + z^2 + 2axy + 4ayz$$

- (a) Determinar la matriz asociada a dicha forma cuadrática.
(b) Clasificar la forma cuadrática, en función del parámetro b .
-

- (7) Dada la función

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

- (a) Obtener los puntos críticos de la función y clasificarlos.
(b) Determinar los conjuntos convexos y abiertos de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es cóncava y los conjuntos convexos y abiertos de $\mathbb{R}^2$ donde es convexa.
(c) Estudiar si f alcanza extremos globales en el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > \frac{2}{3}, y > \frac{2}{3}\}$.
-

(8) Considerar la función

$$f(x, y) = xe^x$$

y el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$$

- (a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A .
 - (b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange y hallar, si existen, los extremos globales de f en A , especificando si son máximos o mínimos. (Ayuda: $2e^{-2} < e^{-1}$)
-