Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas II. Junio de 2008.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h. 30min.**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor compruebe que hay 14 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPAR LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Lea las preguntas con cuidado. Cada apartado del examen vale $0'5$ puntos.
- Hay espacio adicional al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Total	

(1) Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+2y+(a-1)\,z &=& 1\\ x+ay+z &=& 1\\ (a-1)\,x+2y+z &=& -3\end{array}\right.$$

donde $a\in\mathbb{R}$ es una constante.

(a) Clasificar el sistema según los valores de a.

(b) Resolver el sistema anterior para los valores de a para los cuales el sistema es compatible indeterminado. ¿Cuántos parámetros son necesarios para describir la solución en cada caso?

Solución:

(a) En primer lugar calculamos, realizando operaciones elementales por filas, los rangos de la matriz del sistema y de la ampliada,

$$(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a-1 & 1\\ 1 & a & 1 & 1\\ a-1 & 2 & 1 & -3\end{array}\right)\overset{f_2-f_1}{\mapsto}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a-1 & 1\\ 0 & a-2 & 2-a & 0\\ a-1 & 2 & 1 & -3\end{array}\right)\overset{f_3+(1-a)f_1}{\mapsto}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a-1 & 1\\ 0 & a-2 & 2-a & 0\\ 0 & 4-2a & 2a-a^2 & -a-2\end{array}\right)\overset{f_3+2f_2}{\mapsto}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & a-1 & 1\\ 0 & a-2 & 2-a & 0\\ 0 & 0 & 4-a^2 & -a-2\end{array}\right)$$

Vemos que $\det A=(a-2)(4-a^2)=-(a-2)^2(a+2)$, que es distinto de 0 a menos que $a=\pm 2$. Por tanto, si $a\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 2\}$ se verifica que rango $A=\text{rango}(A|B)=3=$ número de incógnitas y el sistema es compatible determinado.

Si $a=2$, la última matriz de la ecuación anterior es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{array}\right)$$

y vemos que rango $A=1<\text{rango}(A|B)=2$, por lo que el sistema es incompatible.

Finalmente, si $a=-2$, la última matriz de la ecuación es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 1\\ 0 & -4 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

y vemos que rango $A=2=\text{rango}(A|B)$, por lo que el sistema es compatible indeterminado, con un grado de libertad.

(b) Para $a=-2$ el sistema original es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=1\\ -4y+4z&=0\end{aligned}$$

Empezando por la segunda ecuación, vemos que $y=z$. Sustituyendo en la primera ecuación, obtenemos $x=1+z$. El conjunto de soluciones se puede describir mediante un parámetro. Todas las soluciones del sistema son de la forma

$$x=1+z,\quad y=z,\quad z\in\mathbb{R}$$

(2) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

(a) Hallar el polinomio característico y los valores propios (o autovalores) de la matriz A.

(b) Justificar razonadamente si la matriz A es diagonalizable y, si lo es, encontrar dos matrices D y P tales que $A = PDP^{-1}$.

(c) Utilizando el apartado anterior, indicar cómo se podría calcular A^{200}. (Es suficiente escribir la respuesta como el producto de tres matrices)

Solución:

(a) El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -4 & 3 \\ -4 & -\lambda & 0 \\ 3 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -\lambda & 0 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -4 \\ -4 & -\lambda \end{vmatrix} = 9\lambda - \lambda^3 + 16\lambda = -\lambda^3 + 25\lambda = \lambda(25 - \lambda^2)$$

Los valores propios son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ y $\lambda_3 = -5$.

(b) La matriz es diagonalizable porque todos los valores propios son distintos. Para determinar la forma diagonal calculamos primero los espacios de vectores propios. El espacio de vectores propios $S(0)$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ -4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Es decir

$$\begin{aligned} -4y + 3z &= 0 \\ 3x &= 0 \end{aligned}$$

La solución es $x = 0$, $y = 3z/4$. Por tanto, $S(0) =< (0, 3, 4) >$. El espacio de vectores propios $S(5)$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & 3 \\ -4 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Este sistema es equivalente al sistema siguiente

$$\begin{aligned} -4x - 5y &= 0 \\ 3x - 5z &= 0 \end{aligned}$$

La solución es $y = -4x/5$, $z = 3x/5$. Por tanto, $S(5) =< (5, -4, 3) >$. El espacio de vectores propios $S(-5)$ es el conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Este sistema es equivalente al sistema siguiente

$$\begin{aligned} -4x + 5y &= 0 \\ 3x + 5z &= 0 \end{aligned}$$

La solución es $y = 4x/5$, $z = -3x/5$. Por tanto, $S(-5) =< (5, 4, -3) >$. Por lo tanto, la forma diagonal, D y la matriz cambio de base, P, son

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 3 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

(c) Observamos que $A = PDP^{-1}$ por lo que $A^{200} = PD^{200}P^{-1} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5^{200} & 0 \\ 0 & 0 & (-5)^{200} \end{pmatrix} P^{-1}$.

(3) Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$,

$$f(x, y, z, t) = (x + z, 2x + y + 2z + 2t, y + 2t, 3x + 2y + 3z + 4t)$$

(a) Escribir la matriz asociada a f (respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$). Calcular las dimensiones del núcleo y de la imagen de f.
(b) Escribir un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que determinen el núcleo y un sistema homogéneo de ecuaciones lineales que determinen la imagen de f. ¿Cuál es el número mínimo de ecuaciones necesarias en cada uno de los sistemas de ecuaciones anteriores?
(c) Hallar una base de la imagen de f y una base para el núcleo de f.

Solución:

(a) La matriz, A, de la aplicación f, respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos la forma reducida,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 2 & 2 & y \\ 0 & 1 & 0 & 2 & z \\ 3 & 2 & 3 & 4 & t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 2 & y-2x \\ 0 & 1 & 0 & 2 & z \\ 0 & 2 & 0 & 4 & t-3x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 2 & y-2x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z-y+2x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+x-2y \end{pmatrix}$$

De aquí deducimos que $\dim \operatorname{Im}(f) = \operatorname{rango}(A) = 2$. De la fórmula

$$4 = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\ker(f))$$

obtenemos ahora que $\dim(\ker(f)) = 2$

(b) Del apartado anterior, vemos que un sistema de ecuaciones que definen a $\operatorname{Im}(f)$ es

$$\begin{aligned} z - y + 2x &= 0 \\ x + t - 2y &= 0 \end{aligned}$$

Como $\operatorname{Im}(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2 necesitamos al menos $4 - 2 = 2$ ecuaciones para determinar este subespacio. Un sistema lineal de ecuaciones para determinar $\ker(f)$ es

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ 2x + y + 2z + 2t &= 0 \\ y + 2t &= 0 \\ 3x + 2y + 3z + 4t &= 0 \end{aligned}$$

$\ker(f)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ de dimensión 2. Necesitamos $4-2 = 2$ ecuaciones para determinar este subespacio. Los vectores $(1, 0, 1, 0)$ y $(0, 1, 0, 2)$ son linealmente independientes. Las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ y + 2t &= 0 \end{aligned}$$

son suficientes para determinar $\ker(f)$.

(c) Una base de $\operatorname{Im}(f)$ consta de dos vectores. Es suficiente tomar dos columnas de A que sean linealmente independientes. Por ejemplo, $\{(1, 2, 0, 3), (0, 1, 1, 2)\}$ es una base de $\operatorname{Im}(f)$. Ahora calculamos una base de $\ker(f)$. Para ello resolvemos el sistema anterior,

$$\begin{aligned} x + z &= 0 \\ y + 2t &= 0 \end{aligned}$$

Claramente, podemos tomar z, t como parámetros y x e y como variables dependientes. Entonces,

$$\ker(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = -z, y = -2t\} = \{(-z, -2t, z, t) : z, t \in \mathbb{R}\}$$

y una base de $\ker(f)$ es $\{(-1, 0, 1, 0), (0, -2, 0, 1)\}$.

(4) Sea el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le \ln x, 1 \le x \le 2\}$.

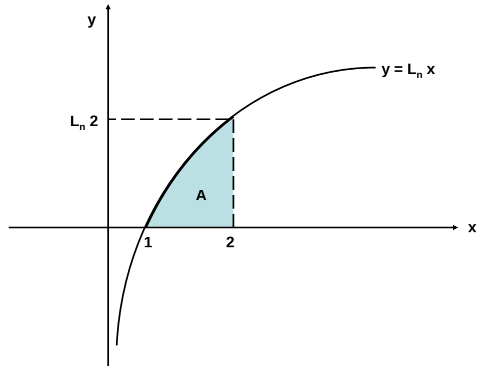
(a) Dibujar el conjunto A, su frontera y su interior, y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.

(b) Demuestra que la función $f(x, y) = y^2 + (x - 1)^2$ tiene un máximo y un mínimo en A.

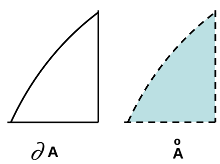
(c) Utilizando las curvas de nivel de $f(x, y)$, hallar el máximo y el mínimo de f en A.

Solución:

(a) El conjunto A es



La frontera e interior son



Como $\partial A \subset A$, el conjunto A es cerrado. No es abierto porque $\partial A \cap A \neq \emptyset$. Otra manera de probar esto sería considerar los conjuntos cerrados $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y\}$, $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \le x \le 2\}$. El conjunto $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \le \log(x)\}$ es también cerrado al ser continua la función $g(x, y) = log(x) - y$. Entonces $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ es un conjunto cerrado.

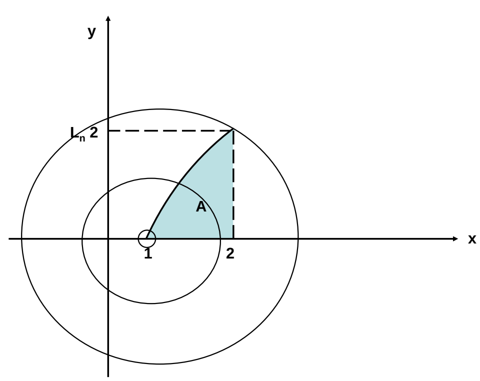
El conjunto A es acotado porque $A \subseteq B(0, r)$ con $r > 0$ suficientemente grande. Como es cerrado y acotado el conjunto A es compacto. El conjunto A es convexo porque es el hipógrafo de la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo $[1, 2]$ y la función $\ln x$ es cóncava.

(b) La función f es continua en todo $\mathbb{R}^2$, porque es un polinomio. En particular, la función es continua en el conjunto A. Además, el conjunto A es compacto ya que es una circunferencia. Por el teorema de Weierstrass, la función alcanza un máximo y un mínimo.

(c) Las curvas de nivel de f tienen por ecuación

$$f(x, y) = y^2 + (x - 1)^2 = C.$$

Son círculos centrados en el punto $(1, 0)$.



Gráficamente, vemos que el máximo es $f(2, \ln 2) = 1 + (\ln 2)^2$ y se alcanza en el punto $(2, \ln 2)$ y que el mínimo es $f(1, 0) = 0$ y se alcanza en el punto en el punto $(1, 0)$.

(5) Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2}{|x|+3|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Estudiar si la función f es continua en el punto $(0,0)$. Estudiar en qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es continua la función f.

(b) Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$, en caso de que existan.

Solución:

(a) Dado $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \varepsilon/2$. Si $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |f(x,y) - f(0,0)| &= \left| \frac{2x^2}{|x|+3|y|} \right| = \frac{2x^2}{|x|+3|y|} = 2|x| \frac{|x|}{|x|+3|y|} \\ &\leq 2|x| \leq 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

Por tanto, la función es continua en el punto $(0,0)$. También es continua en los demás puntos de $\mathbb{R}^2$, ya que es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula.

(b) La derivada parcial de f respecto a x en el punto $(0,0)$ es

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{2t^2}{|t|} - 0}{t} = 2 \lim_{t \to 0} \frac{t}{|t|} \end{aligned}$$

que no existe. Y derivada parcial de f respecto a y en el punto $(0,0)$ es

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{0}{3|t|} - 0}{t} = 0 \end{aligned}$$

(6) Dada la forma cuadrática

$$Q(x,y,z) = x^2 + 2ay^2 + z^2 + 2axy + 4ayz$$

(a) Determinar la matriz asociada a dicha forma cuadrática.
(b) Clasificar la forma cuadrática, en función del parámetro b.

Solución:

(a) Llamamos A a la matriz asociada a Q. Entonces,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2a & 2a \\ 0 & 2a & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Calculamos los menores principales,

$$D_1 = 1 > 0;\ D_2 = a(2-a);\ D_3 = a(2-5a).$$

Observamos que

- $D_2 \geq 0$ si y sólo si $0 \leq a \leq 2$
- $D_3 \geq 0$ si y sólo si $0 \leq a \leq \frac{2}{5}$.

Entonces, $D_i > 0$ para todo $i = 1,2,3$ si y sólo si $0 < a < \frac{2}{5}$. Para estos valores de a la matriz Q es definida positiva.

Si $a = \frac{2}{5}$, entonces $D_1, D_2 > 0$ y $D_3 = 0$ por lo que Q es semidefinida positiva.

Finalmente, si $a = 0$, los valores propios de la matriz A son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 1$, por lo que Q es semidefinida positiva si $a = 0$. En resumen,

- Si $0 < a < \frac{2}{5}$ la forma cuadrática Q is definida positiva.
- Si $a = 0$ o $a = \frac{2}{5}$ la forma cuadrática Q es semidefinida positiva.
- En los demás casos (es decir, si $a < 0$ ó $a > \frac{2}{5}$), la forma cuadrática Q is indefinida, ya que $D_1 > 0$ y $D_3 < 0$.

(7) Dada la función
$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$
(a) Obtener los puntos críticos de la función y clasificarlos.
(b) Determinar los conjuntos convexos y abiertos de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es cóncava y los conjuntos convexos y abiertos de $\mathbb{R}^2$ donde es convexa.
(c) Estudiar si f alcanza extremos globales en el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > \frac{2}{3}, y > \frac{2}{3}\}$.

Solución:

(a) Como la función es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ (porque es un polinomio), los puntos críticos deben satisfacer la condición necesaria de primer orden $\nabla f(x,y) = (0,0)$. Calculando las dos derivadas parciales obtenemos
$$\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x)$$
e igualando a 0 obtenemos el sistema
$$\left.\begin{array}{rcl} 3x^2 - 3y & = & 0 \\ 3y^2 - 3x & = & 0 \end{array}\right\}$$
despejando y en la primera tenemos $y = x^2$, y sustituyendo en la segunda queda, $3x^4 - 3x = 0$, sacando factor común la ecuación queda $3x(x^3 - 1) = 0$ de donde obtenemos como soluciones del sistema $(0,0)$ y $(1,1)$. Para clasificar los puntos críticos, aplicamos la condición suficiente de segundo orden. Construimos la matriz hessiana
$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$
y la evaluamos en cada uno de los puntos. En el punto $(0,0)$
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$
los menores principales son $D_1 = 0$, $D_2 = -9$ y vemos que es indefinida. Luego f tiene un punto de silla en el $(0,0)$. En el punto $(1,1)$
$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$
los menores principales son $D_1 = 6$, $D_2 = 27$. Luego es definida positiva, y f tiene un mínimo local en el punto $(1,1)$.

(b) Estudiamos el signo de la matriz hessiana en función de x y de y, mediante los menores principales. Éstos son $D_1 = 6x$, $D_2 = 36xy - 9$. Vemos f es convexa si $x > 0$ y $36xy - 9 > 0$. Entonces f es convexa en el conjunto
$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, xy > \frac{1}{4}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > \frac{1}{4x}\}$$
La función es cóncava cuando $D_1 = 6x < 0$, $D_2 = 36xy - 9 > 0$, es decir en el conjunto
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, xy > \frac{1}{4}\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y < \frac{1}{4x}\}$$
Los conjuntos B y C son convexos y abiertos.

(c) Como el conjunto A no es compacto, no podemos aplicar el teorema de Weierstrass para garantizar la existencia de extremos globales. Al ser el conjunto abierto y convexo y dado que $(1,1) \in A$, si f fuera convexa en A podríamos garantizar que el mínimo local lo es también global en A. Observamos que $A \subset B$, ya que si
$$x > \frac{2}{3}, y > \frac{2}{3}$$
se verifica que
$$x > 0, \qquad xy > \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} > \frac{1}{4}$$
Deducimos que la función es (estrictamente) convexa en el conjunto A y el mínimo local $(1,1)$ es también un mínimo global. La función no alcanza máximo global en A pues debería ser también máximo local por ser A abierto y no hay más puntos críticos en A que el punto $(1,1)$.

(8) Considerar la función

$$f(x,y) = xe^x$$

y el conjunto

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4\}$$

(a) Hallar las ecuaciones de Lagrange que determinan los extremos de f en A.

(b) Determinar los puntos que satisfacen las ecuaciones de Lagrange y hallar, si existen, los extremos globales de f en A, especificando si son máximos o mínimos. (Ayuda: $2e^{-2} < e^{-1}$)

Solución:

(a) El Lagrangiano es

$$L(x,y) = xe^x + \lambda(4 - x^2 - y^2)$$

Derivando obtenemos las ecuaciones de Lagrange

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = e^x(x+1) - 2x\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -2y\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

(b) De la segunda ecuación observamos que o bien $y = 0$ o bien $\lambda = 0$.

- Si $y = 0$, por la tercera ecuación tenemos que $x^2 = 4$ y por la primera ecuación $\lambda = \frac{e^x(x+1)}{2x}$. Obtenemos los puntos

$$x = 2, \quad y = 0, \quad \lambda = \frac{3}{4}e^2,$$

y

$$x = -2, \quad y = 0, \quad \lambda = \frac{1}{4}e^{-2}.$$

- Si $\lambda = 0$, por la primera ecuación $x = -1$ y por la tercera $y = \pm\sqrt{3}$

Por tanto las soluciones son; $(2,0)$, $(-2,0), (-1,\sqrt{3}), (-1,-\sqrt{3})$. El conjunto A es compacto (ya que es una circunferencia) y la función es continua (por ser producto de funciones elementales). Por el Teorema de Weierstrass, la función alcanza un máximo y un mínimo en A. Calculamos los valores de f en los puntos críticos:

$$f(2,0) = 2e^2$$
$$f(-2,0) = -2e^{-2}$$
$$f(-1,\sqrt{3}) = f(-1,-\sqrt{3}) = -e^{-1}$$

La función f alcanza un máximo en $(2,0)$ y un mínimo en los puntos $(-1,\sqrt{3})$ y $(-1,-\sqrt{3})$.